

典型例题选讲1 —— 力学部分

大学物理B、C、D 期末复习



1. 知识点梳理 —— ① 力学部分

- 质点运动学：描述质点运动的基本物理量、基本物理量在直角标系和自然标系中的表述、质点的运动函数、圆周运动、相对运动
- 质点动力学1：牛顿运动定律及应用（微积分在物理学中的应用实例）、力学相对性原理、惯性系与非惯性系、惯性力
- 质点动力学2：冲量与动量定理、质点系动量定理和动量守恒定律、火箭的飞行原理
- 质点动力学3：动能定理、保守力的功、保守力与非保守力、势能、质点系的动能定理、功能原理、机械能守恒、三种宇宙速度、质心、质心运动定理及其应用
- 刚体定轴转动1：质点、质点系的角动量定理和角动量守恒定律、刚体运动描述、刚体的平面运动
- 刚体定轴转动2：刚体定轴转动定律、转动惯量、刚体定轴转动的角动量守恒、转动中的功和能
- 相对论1：狭义相对论基本假设、洛伦兹变换、相对论的速度变换、同时的相对性、长度收缩和时间膨胀
- 相对论2：相对论的质量、动能、能量、质能关系

大物B拓展：陀螺导航仪、直升机螺旋翼的设计、航天器的姿态调整 // 受控核聚变

大物C拓展：惯性传感和MEMS // 陀螺导航仪

大物D拓展：火箭飞行原理、三种宇宙速度 // 刚体的进动



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例1. 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, 其中 $x(t) = 1.0t + 2.0$, $y(t) = 0.25t^2 + 2.0$ 。式中 x, y 的单位为 m(米), t 的单位为 s(秒)。
求: (1) 求 $t = 3\text{ s}$ 时的速度; (2) 请做出作出质点的运动轨迹图。

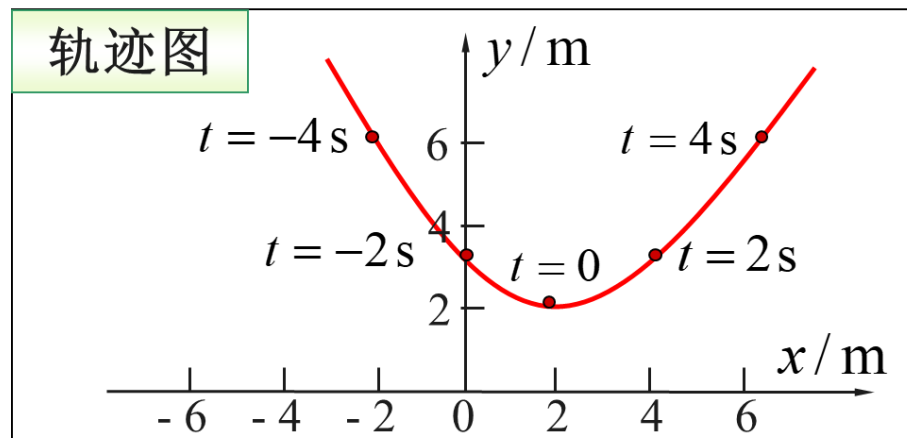
解: (1) $\vec{v} = 1.0\vec{i} + 1.5\vec{j}$

速度大小为: $v = 1.8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

速度方向为: 与x轴夹角 $\theta = \arctan \frac{1.5}{1.0} = 56.3^\circ$

(2) 轨迹方程:

$$y = 0.25x^2 - x + 3.0$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例2. 如图A、B两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B两物体可在光滑轨道上滑行。如物体A以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，物体B的速率为多少？

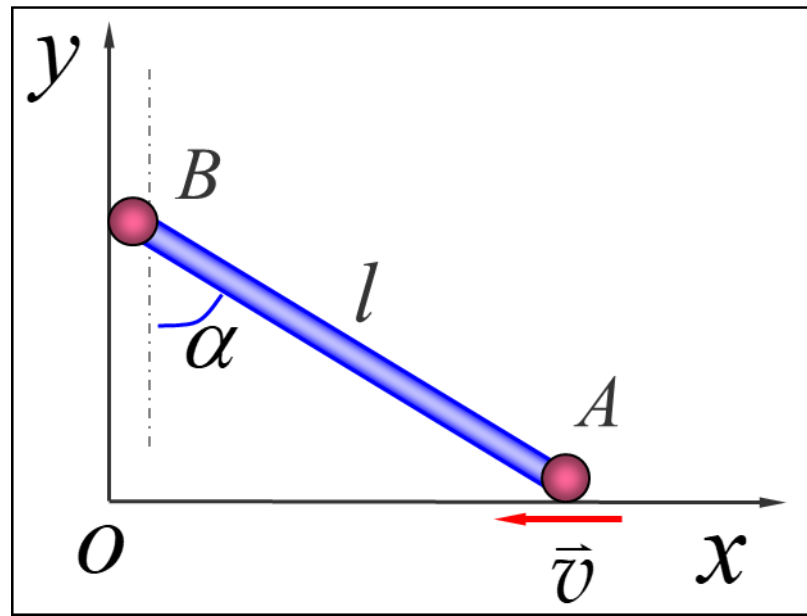
解： 考察质点A、B的运动

$$\vec{v}_A = v_x \vec{i} = \frac{dx}{dt} \vec{i} = -v \vec{i}, \quad \vec{v}_B = v_y \vec{j} = \frac{dy}{dt} \vec{j}.$$

考虑细杆的约束条件：

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \vec{v}_B = v \tan \alpha \vec{j}$$





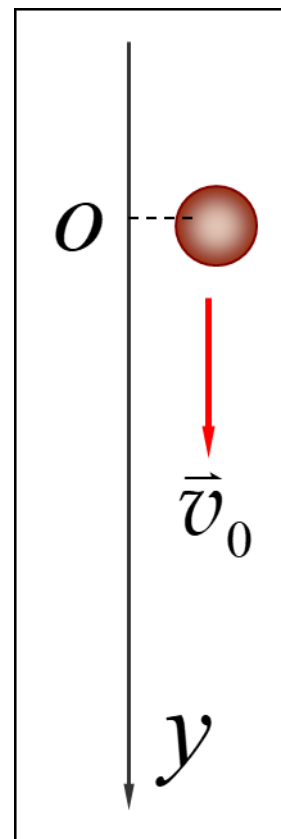
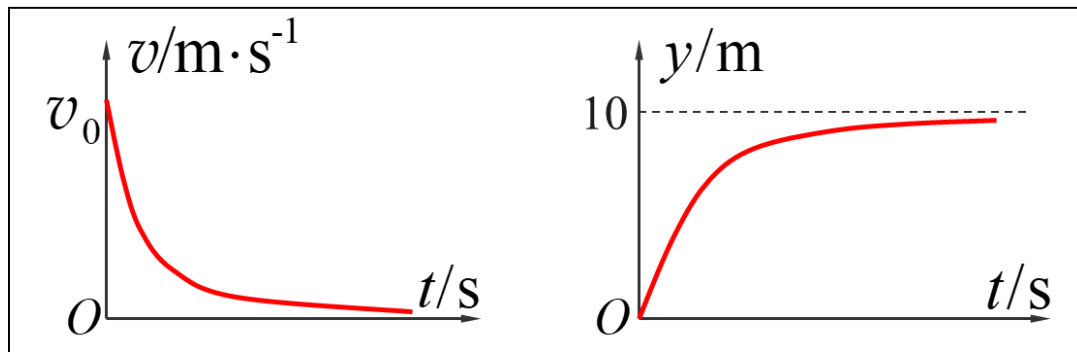
2. 典型例题 —— ① 力学部分

例3. 有一个球体在某液体中竖直下落，其初速度为 $\vec{v}_0 = 10\vec{j}$ ，它在液体中的加速度为 $\vec{a} = -1.0v\vec{j}$. 问：(1) 经过多少时间后可以认为小球已停止运动；(2) 此球体在停止运动前经历的路程有多长？

解： 根据速度、加速度定义 $a = \frac{dv}{dt} = -1.0v$

积分： $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad v = v_0 e^{-t}.$

$$\because v = \frac{dy}{dt} = v_0 e^{-t} \quad \rightarrow \quad y = 10(1 - e^{-t}).$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例4. 有一个质点沿着 x 轴运动，其加速度 a 与位置的关系为 $a = 2 + 6x^2$ ，物理量均为国际单位制。如果质点在**原点处的速度为0**，**求其在任意点的速度**。

解： 根据加速度定义 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 2 + 6x^2 \quad \rightarrow \quad vdv = (2 + 6x^2)dx$

根据已知条件， $v(x=0)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 - 0 = (2x + 3x^3) - 0$

$$\rightarrow v^2 = 4(x + 3x^3)$$

讨论1：若 $x > 0 \quad \rightarrow \quad v = 2(x + 3x^3)^{1/2} \quad \bullet \quad \text{负号能否被舍去？}$

讨论2：若 $x < 0$ ，**上式是否有意义？如何处理？**



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例4. 有一个质点沿着 x 轴运动，其加速度 a 与位置的关系为 $a = 2 + 6x^2$ ，物理量均为国际单位制。如果质点在**原点处的速度为0**，**求其在任意点的速度**。

学生感叹

默 2025/3/1 23:10:25

真是没想到一道书后习题也可以思考得这么深



你撤回了一条消息

ZKY 2025/3/1 23:11:43



嗯，因为当你去思考“真实物理问题”而不是求解数学微分方程的时候，你不得不去面对这些。

并不深，客观世界就是这样而已

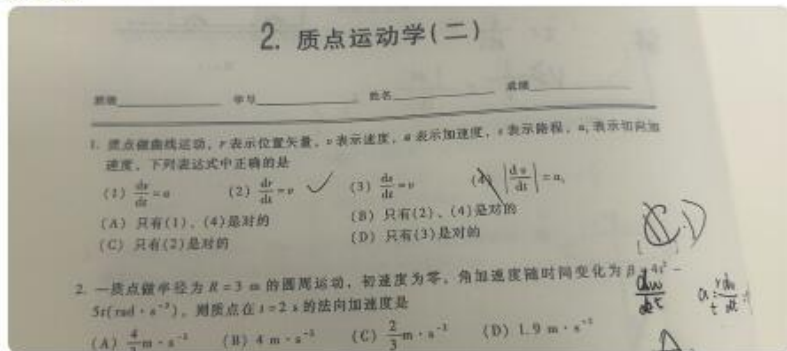
老师点评



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例5. 答疑典型例题1（学生由于基本物理概念不明导致的困惑）

灰灰社会人 20:37:11



灰灰社会人 20:37:18

这第一题感觉题有问题呢

灰灰社会人 20:38:19

题目说 r 是位置矢量，意思（2） r 是位置矢量呗，2就得是对的

灰灰社会人 20:38:44

题目说 v 是速度，（3）表示的是速率呗，那3就不能对

灰灰社会人 20:38:51

答案给的就是D

灰灰社会人 20:38:52

/噢

6512161 20:40:50

的确是题目有问题，可以把自己的正确理解写在题目旁边。助教看到就会一目了然

$$\vec{r} = r(t) \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \omega v = r \omega^2 = \frac{v^2}{r}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例6. 答疑典型例题2（一道题告诉你什么叫“分析问题和解决问题的能力”）

定.质点作匀速率圆周运动时, a_t 恒为零;质点作匀变速率圆周运动时, a_t 为一不为零的常量,当 a_t 改变时,质点则作一般的变速率圆周运动.由此可见,应选(B).

*1-5 如图所示,湖中有一小船,有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮,拉湖中的船向岸边运动.设该人以匀速率 v_0 收绳,绳不伸长且湖水静止,小船的速率为 v ,则小船作().

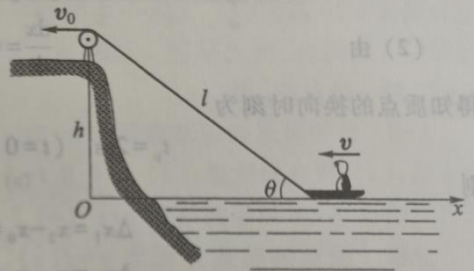
(A) 匀加速运动, $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$

(B) 匀减速运动, $v = v_0 \cos \theta$

(C) 变加速运动, $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$

(D) 变减速运动, $v = v_0 \cos \theta$

(E) 匀速直线运动, $v = v_0$



题 1-5 图

分析与解 本题关键是先求得

小船速度表达式,进而判断运动性质.为此建立如图所示坐标系,设定滑轮距水面高度为 h , t 时刻定滑轮距小船的绳长为 l ,则小船的运动方程为 $x = \sqrt{l^2 - h^2}$,其

中绳长 l 随时间 t 而变化.小船速度 $v = \frac{dx}{dt} = \frac{l \frac{dl}{dt}}{\sqrt{l^2 - h^2}}$,式中 $\frac{dl}{dt}$ 表示绳长 l 随时间的变化率,其大小即为 v_0 ,代入整理后为 $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$,方向沿 x 轴负向.由速度

表达式,可判断小船作变加速运动.故选(C).

讨论 有人会将绳子速率 v_0 按 x 、 y 两个方向分解,则小船速度 $v = v_0 \cos \theta$,这样做对吗?

2025/3/2 19:04:16

那这个题要是把绳子速度分解了答案不就变了

ZKY 2025/3/2 19:04:34

你先明确下研究对象,是绳子,还是小船?二者能否作为一个

202411 2025/3/2 19:05:18

奥我好像懂了

2024113100 2025/3/2 19:05:29

研究对象是小船

ZKY 2025/3/2 19:05:35



2024113100 2025/3/2 19:06:37

那就是研究哪个物体的速度就把哪个物体的速度分解呗

ZKY 2025/3/2 19:07:27

先明确研究对象,然后再分析问题

这叫“分析问题和解决问题的能力”

至于要不要分解,得看具体情况

2024113100 2025/3/2 19:07:47

哦哦

2024113100 2025/3/2 19:07:56

谢谢老师

ZKY 2025/3/2 19:08:51

对方还不是我的好友, 点击添加好友

18:21



老师, 对于群里那个速度分解那个, 我简单分享一下我的想法哈. 速度的分解, 最后合成得到的那个速度一定是要和物体运动的方向一样的.

然而我们将速度沿 x 轴和 y 轴分解之后, 这种做法得到的合速度肯定是沿着绳子方向上的, 但是实际上船并不是沿绳子方向运动, 所以否定了这种分解方法.

18:31

嗯, 你理解的对

就是根据速度的定义, 质点运动的方向是速度的方向.

这个速度可以向着任意两个方向分解(数学的分解), 形成分速度

18:36



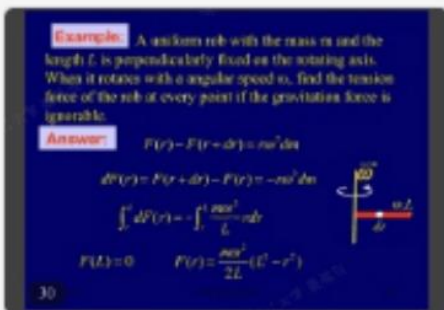
嗯嗯



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例7. 答疑典型例题3 (“客观世界”到“物理模型”的有效过渡)

周老师好



想问一下这里为什么 $F(L) = 0$?

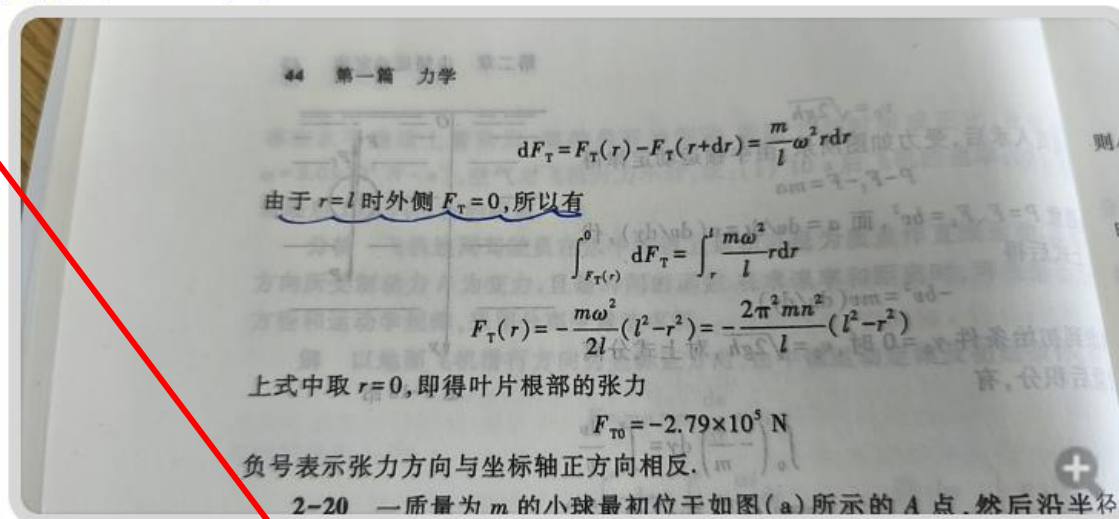
2025年2月24日 9:40

F是质元与质元之间的相互作用。L是端面，与空气的相互作用近似为0

好的，谢谢老师

浙大某本科生2025.02.24提问

恋孤殇独◇ 2025/3/3 15:47:23



恋孤殇独◇ 2025/3/3 15:47:57

老师不大理解为什么当 $r=l$ 时 $F=0$

恋孤殇独◇ 2025/3/3 15:48:26

是第二章的2-19题

哈工大某本科生2025.03.03提问

微分思想

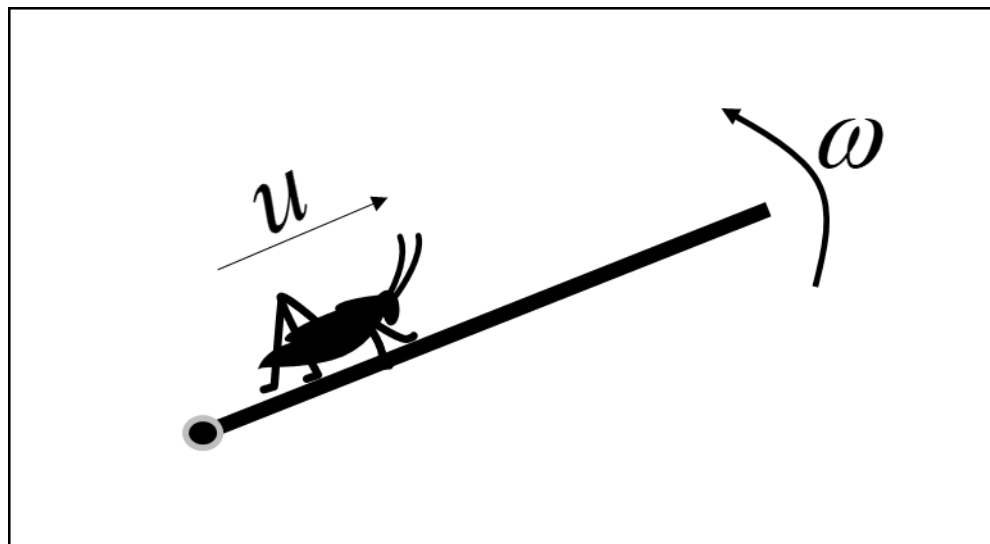
力的概念

数学建模



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例7. “设一根细棒在水平面内以恒定的角速度 ω 绕棒的顶点O旋转，有一只昆虫从 $t = 0$ 开始从O点出发，以恒定的速率 u 沿棒向外侧爬行。求昆虫在任意时刻的爬行速度和加速度”。

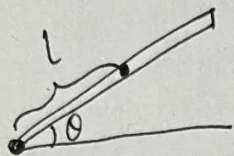




2. 典型例题 —— ① 力学部分

解： 直角坐标系和极坐标系均能得到正确结论

∴ 直角坐标系



$$\theta = \omega t$$

$$l = ut$$

$$x = l \cos \theta$$

$$y = l \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ut \cos \omega t \\ y = ut \sin \omega t \end{cases}$$

$$v_x = \dot{x} = u(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)$$

$$v_y = \dot{y} = u(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = u\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

$$a_x = \ddot{x} = -u\omega(2\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

$$a_y = \ddot{y} = u\omega(2\cos \omega t - \omega t \sin \omega t)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = u\omega\sqrt{4 + \omega^2 t^2}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = u\vec{e}_r \\ \vec{v}_\theta = \omega \cdot R = \omega t \cdot u \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

$$\therefore \vec{v} = u\vec{e}_r + \omega t u \vec{e}_\theta$$

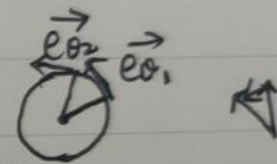
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{e}_r + \frac{d(\omega t u)}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$= u \frac{d\vec{e}_r}{dt} + u\omega \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$= u \frac{d\theta}{dt} \times \vec{e}_\theta + u\omega \vec{e}_\theta + u\omega \cdot t \times \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$= 2u\omega \vec{e}_\theta + u\omega \cdot t \times \frac{d\theta}{dt} \cdot (-\vec{e}_r)$$

$$= 2u\omega \vec{e}_\theta + u\omega^2 t \cdot (-\vec{e}_r)$$

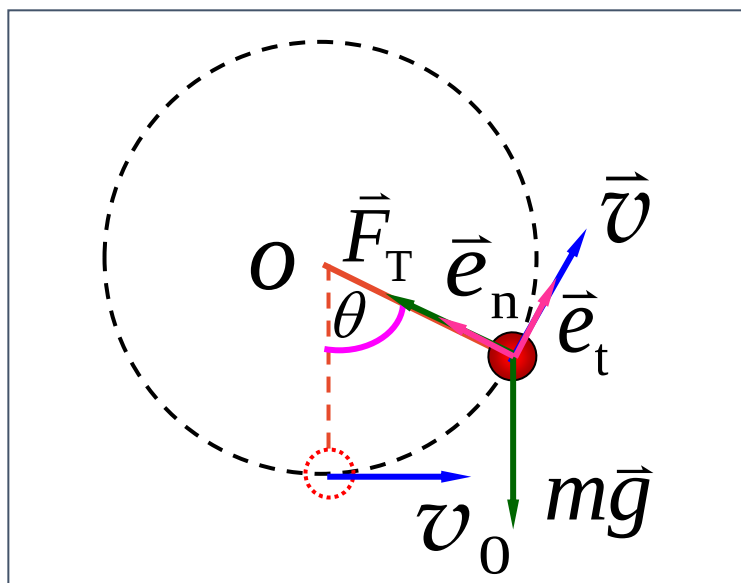


思考：这些加速度都是由哪些力引起的呢？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例8. 如图，长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 O 。 $t = 0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$ ，求小球在任意位置的速率及绳的张力。（牛顿定律的典型应用1）



$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

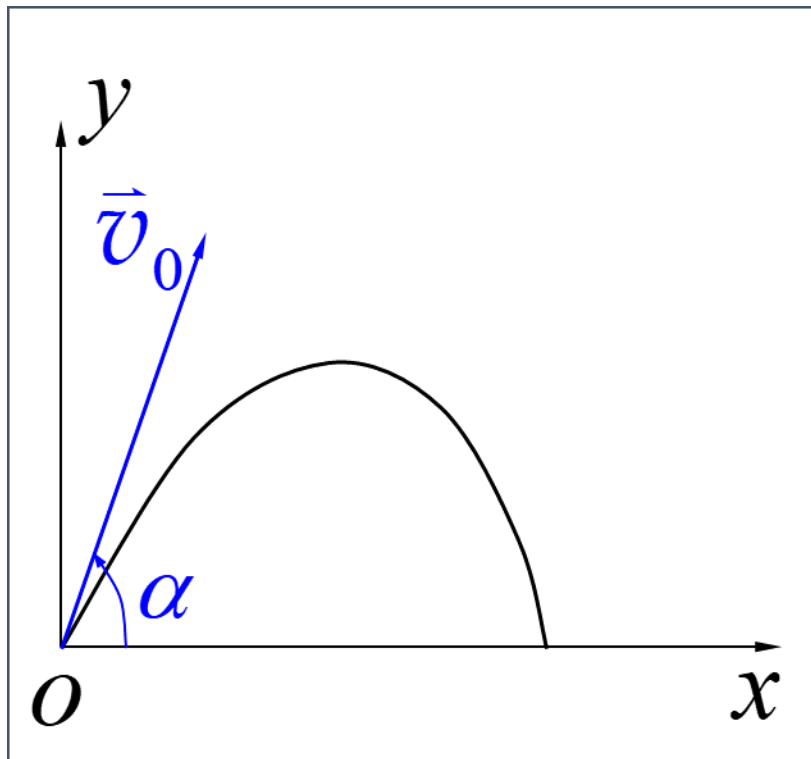
$$F_T = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g \cos \theta\right)$$

引申问题：如果小球受到与速度相关的空气阻力，高中物理能否进行求解？如何求解？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例9. 如图，设空气对抛体的阻力与抛体的速度成正比，即 $\vec{F}_r = -k\vec{v}$ ， k 为比例系数。抛体的质量为 m 、初速为 $\vec{v}_0$ 、抛射角为 α 。求抛体运动的轨迹方程。（**牛顿定律的典型应用2**）



$$\begin{cases} x = \frac{m}{k} (v_0 \cos \alpha) (1 - e^{-kt/m}) \\ y = \frac{m}{k} (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}) (1 - e^{-kt/m}) - \frac{mg}{k} t \end{cases}$$

(运动方程)

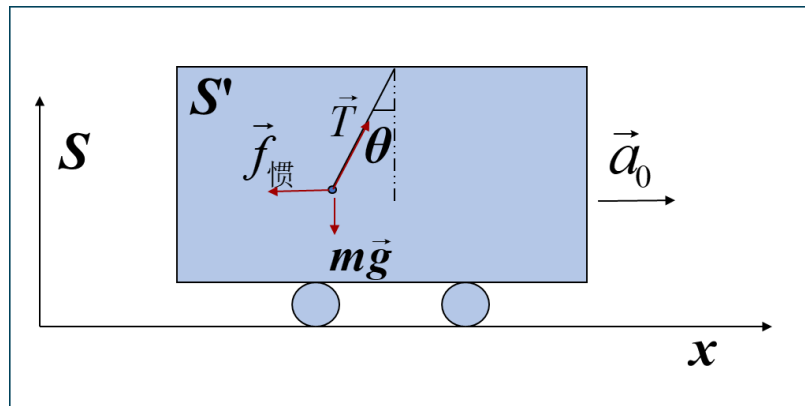
$$y = \left(\tan \alpha + \frac{mg}{k v_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 - \frac{k}{m v_0 \cos \alpha} x \right)$$

(轨迹方程)



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例10. 典型应用题1 (惯性力——非惯性参考系的处理方案)



1. 加速平动参考系:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$

2. 转动参考系:

- 惯性离心力 $\vec{F}_i = m\omega^2\vec{r}$

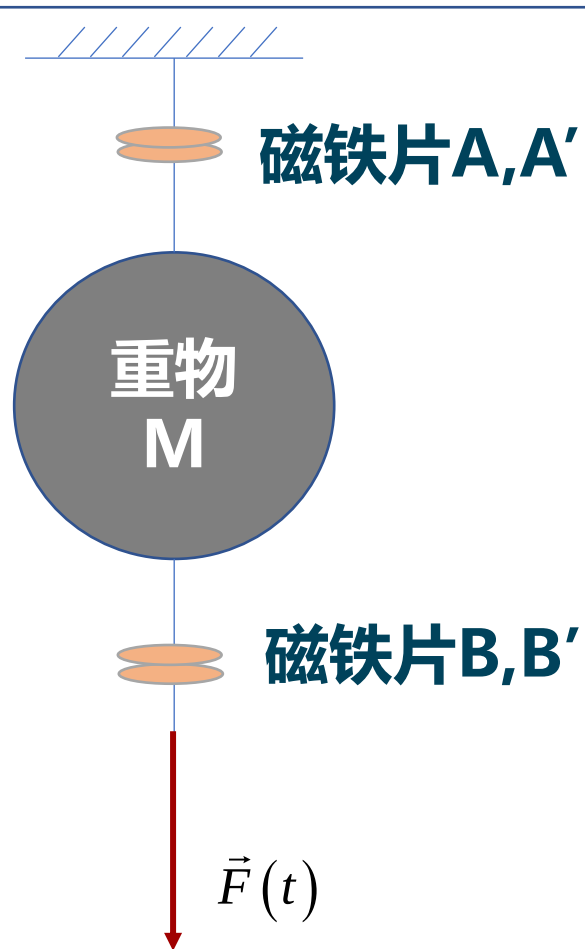
- 科里奥利力 $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例11. 典型应用题2 (冲量——力的积累效果)



1) 缓慢拉动装置下端的细绳,

- 观察实验现象;
- 给出物理学解释。

2) 迅速拉动装置下端的细绳,

- 观察实验现象;
- 给出物理学解释。



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例12. 典型应用题3 (冲量——逆风行舟的道理：授人以鱼不如授人以渔)



扫码进入HIT大物知识图谱，向学长取经

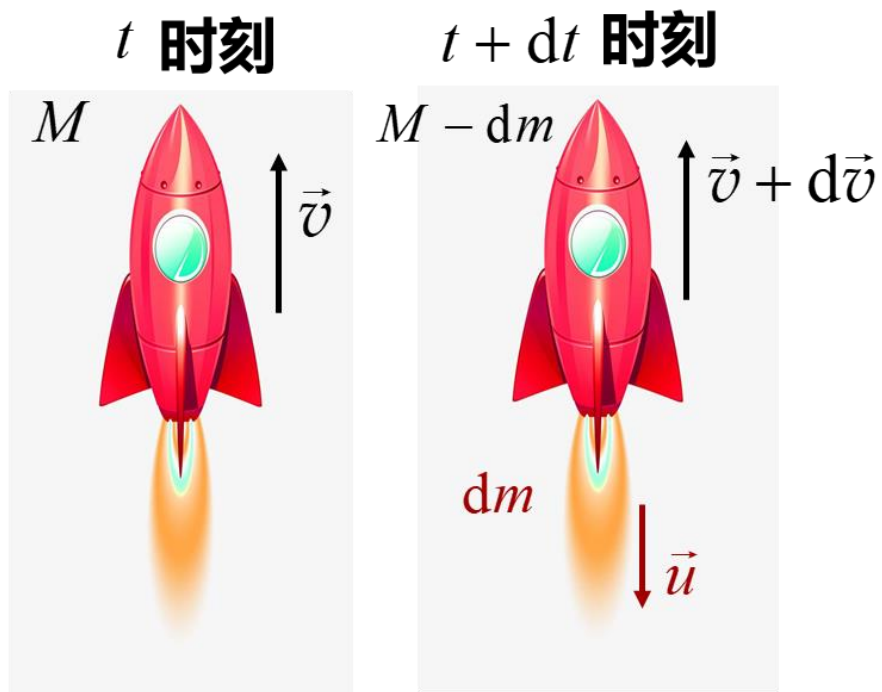




2. 典型例题 —— ① 力学部分

例13. 典型应用题4 (系统内质量移动问题——火箭的飞行原理1)

暂不考虑地球的引力和空气阻力
→ 系统的动量守恒



$\vec{u}$ —— 气体相对于火箭喷出的速度

$$\Delta v = v - v_0 = u \ln \frac{M_0}{M}$$

齐奥尔科夫斯基公式

$$F_{\text{推}} = -F' = u \frac{dm}{dt} = -u \frac{dM}{dt}$$

推力公式

$u \frac{dm}{dt} - mg = (m - dm) \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dt}$
 $\frac{dv}{dt} = \frac{u}{m} \frac{dm}{dt} - g$
 $dv = \frac{u}{m} dm - g dt$ 同时对两个变量积分
 $v - v_0 = -u \ln \frac{M_0}{M} - g t$
 $v = v_0 - u \ln \frac{M_0}{M} - g t$

学生思考

考虑重力



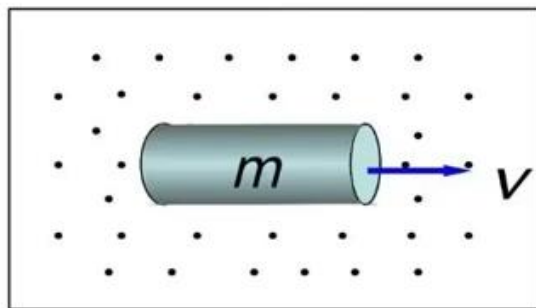
真实过程?



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例14. 典型应用题4 (系统内质量移动问题——火箭的飞行原理2)

例1 宇宙中有密度为 ρ 的尘埃，这些尘埃相对惯性参考系静止。有一质量为 m_0 的宇宙飞船以初速 v_0 穿过宇宙尘埃，由于尘埃粘贴到飞船上，使飞船的速度发生改变。求飞船的速度与其在尘埃中飞行时间的关系。(设想飞船的外形是面积为 S 的圆柱体)



解： (动量守恒) $m_0 v_0 = m v$

$$\rightarrow dm = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv$$

$$dm = \rho S v dt$$

$$\rightarrow -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv = \rho S v dt$$

$$\rightarrow -\frac{1}{v^3} dv = \frac{\rho S}{m_0 v_0} dt$$

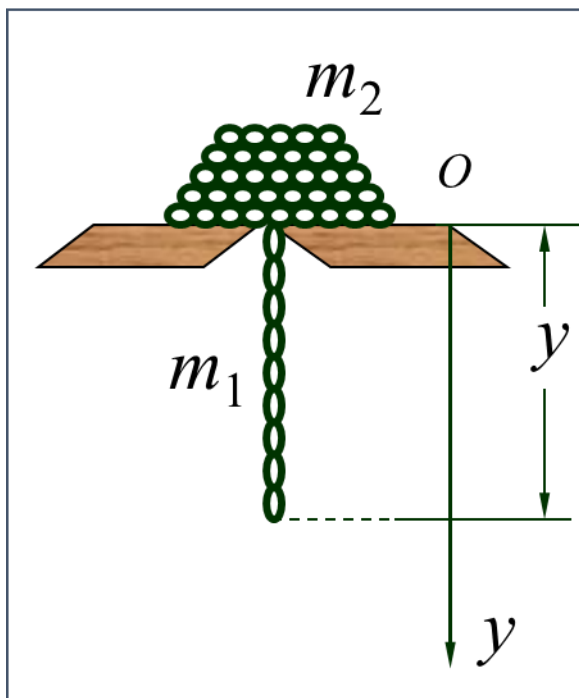
哈工大某本科生2023年春季
学期答疑题目

$$\rightarrow \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) / 2 = \frac{\rho S}{m_0 v_0} t \quad \rightarrow v = v_0 \sqrt{\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例15. 一柔软链条长为 l ，单位长度的质量为 λ ，链条放在有一小孔的桌上，链条一端由小孔稍伸下，其余部分堆在小孔周围。由于某种扰动，链条因自身重量开始下落。求：链条下落速度 v 与 y 之间的关系。设各处摩擦均不计，且认为链条软得可以自由伸开。 【三根链条之一】



解： 以整体为研究对象

$$F^{\text{ex}} dt = dp \quad \rightarrow \quad \lambda y g dt = \lambda d(yv)$$

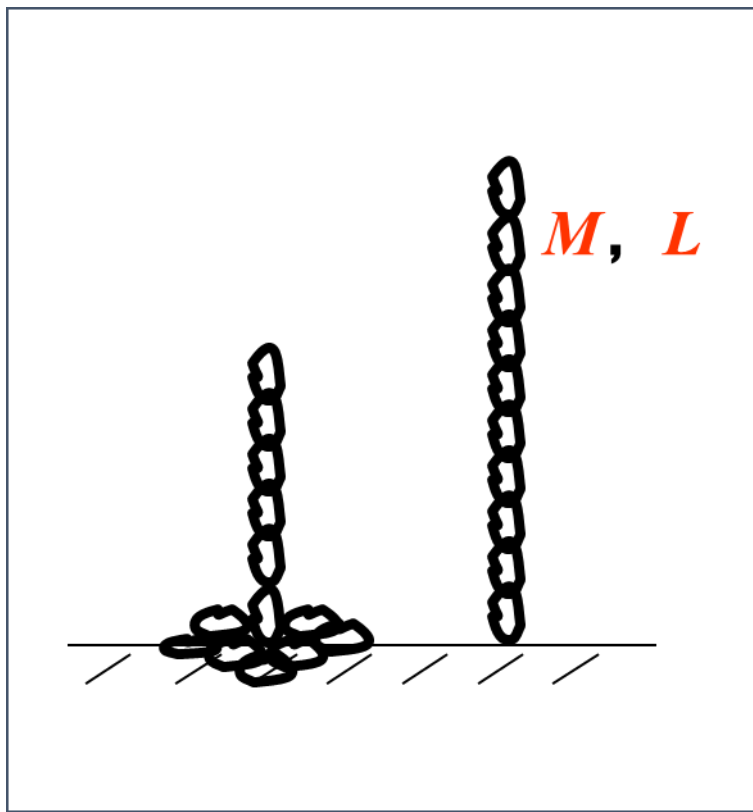
$$yg = \frac{d(yv)}{dt} = \frac{d(yv)}{dt} \frac{dy}{dy} = \frac{v d(yv)}{dy}$$

$$\therefore gy dy = v d(yv) \quad \Rightarrow \quad \frac{gy^3}{3} = \frac{(yv)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gy}{3}}.$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例16. 手持匀质链条上端 M , L , 下端刚好和地面接触, 放手自由下落。求: 链条下落一定长度时, 地面受链条作用力大小。 【三根链条之二】



解: 以 dm 为研究对象

$$(gdm - N)dt = 0 - vdm \quad \rightarrow \quad N = v \frac{dm}{dt}$$

$$\rightarrow N = \lambda v \frac{dy}{dt} = \lambda v^2 = 2\lambda gy$$

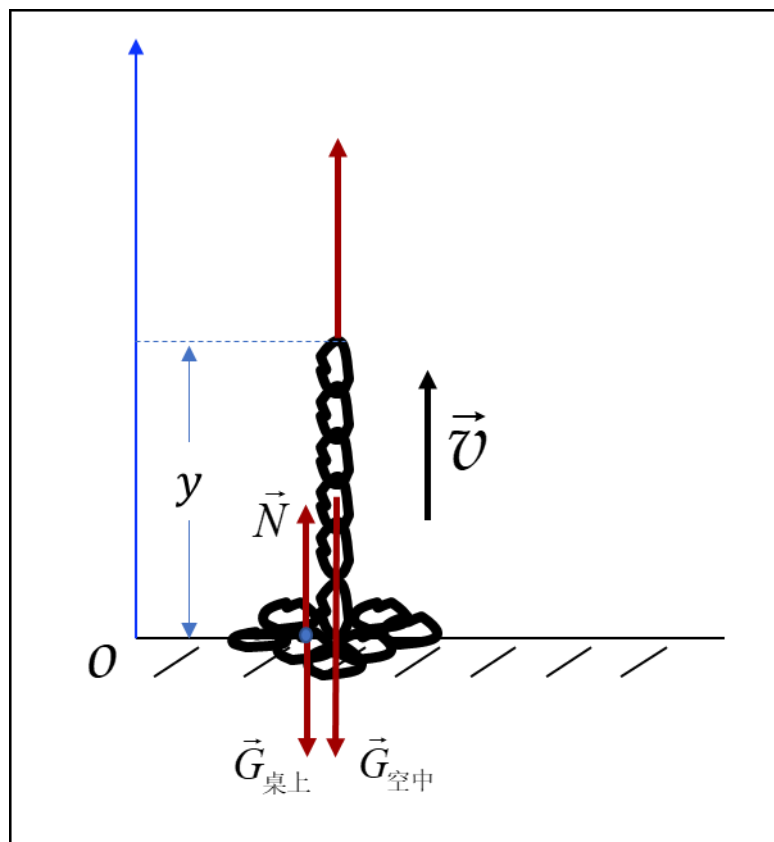
地面受力:

$$F = N + \lambda yg = 3\lambda yg = 3\frac{y}{L} Mg$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例17. 手桌面上堆放着一条柔软的链条，单位长度的质量为 ρ ，现用手拉住链条的一端以恒定的速率 v_0 竖直向上提起。求当提起的长度为 l 时，手作用于链条的拉力。 **【三根链条之三】**



解法一：（质点系动量定理）

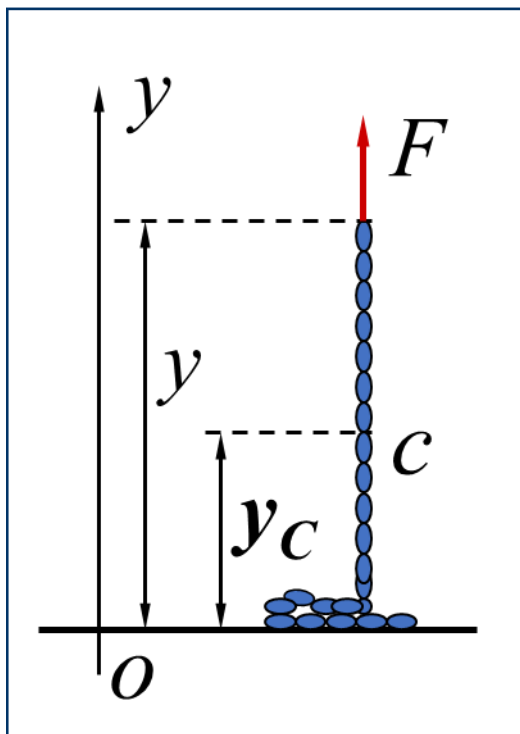
$$F - \lambda y g = \frac{dp}{dt} \quad p = \lambda y v$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= \lambda y g + \frac{dp}{dt} = \lambda g y + \lambda v \frac{dy}{dt} \\ &= \lambda g y + \lambda v^2. \end{aligned}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例17. 手桌面上堆放着一条柔软的链条，单位长度的质量为 ρ ，现用手拉住链条的一端以恒定的速率 v_0 竖直向上提起。求当提起的长度为 l 时，手作用于链条的拉力。 【三根链条之三】



解法二： (质心运动定理)

$$y_c = \frac{\lambda y \cdot \frac{y}{2} + 0}{m} = \frac{\lambda y^2}{2m}. \quad \rightarrow \quad v_c = \frac{dy_c}{dt} = \frac{\lambda y}{m} v. \quad \rightarrow \quad a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{\lambda}{m} v^2.$$

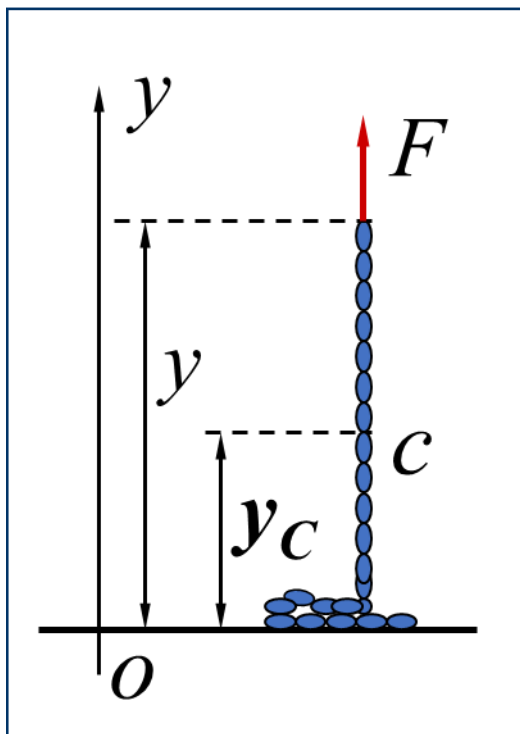
$$F - \lambda y g = m a_c = \lambda v^2$$

$$\rightarrow F = \lambda g y + \lambda v^2$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例17. 手桌面上堆放着一条柔软的链条，单位长度的质量为 ρ ，现用手拉住链条的一端以恒定的速率 v_0 竖直向上提起。求当提起的长度为 l 时，手作用于链条的拉力。 **【三根链条之三】**

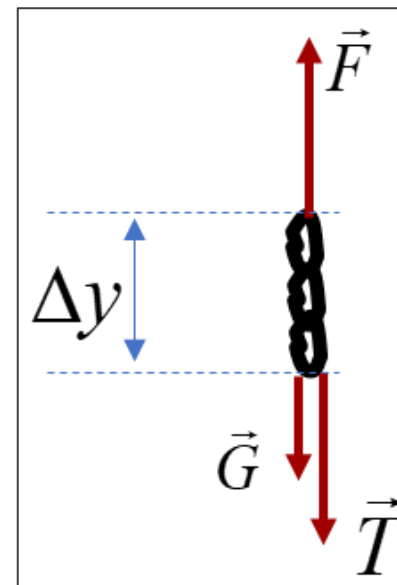


拓展：链条内拉力分布&功能原理（如右图）

$$\begin{aligned} T(\Delta y) &= F - \lambda g \Delta y \\ &= \lambda g (y - \Delta y) + \lambda v^2. \end{aligned}$$

$$\rightarrow T(0) = F; \quad T(y) = \lambda v^2.$$

内力做功 $\neq 0$

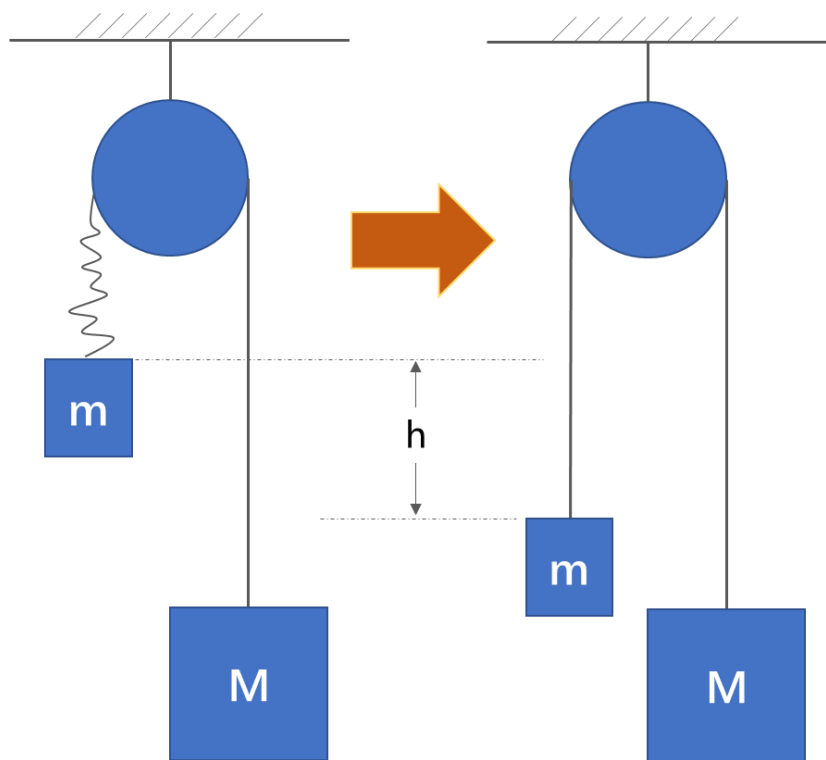




2. 典型例题 —— ① 力学部分

例18. 如图当滑轮左侧 m 下落 h 后，轻绳瞬间绷直， M 在轻绳作用下与 m 上升。求：

- (1) 轻绳绷紧前 m 的速度；(2) 轻绳绷紧后 M 和 m 的速度；(3) 讨论系统动量的变化；
(4) 讨论绳子绷直过程中，吊绳对滑轮的冲量？（动量定理&动量守恒定律）



解：根据牛顿定律： $v_0 = \sqrt{2gh}$

质点动量定理/动量守恒

$$\rightarrow v_m = v_M = \frac{m}{m+M} v_0$$

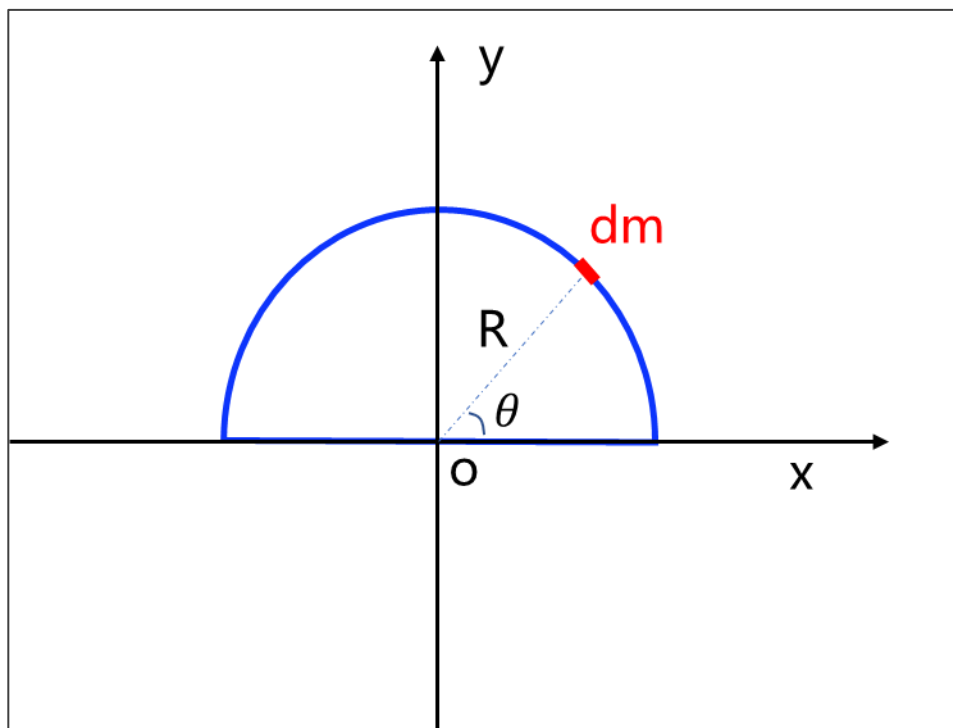
质点系动量定理

$$\begin{aligned} I_{\text{吊绳}} &= \Delta p_{\text{系统}} = (mv_M - Mv_m) - mv_0 \\ &= -\frac{2mM}{m+M} \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例19. 半圆弧质心的求解



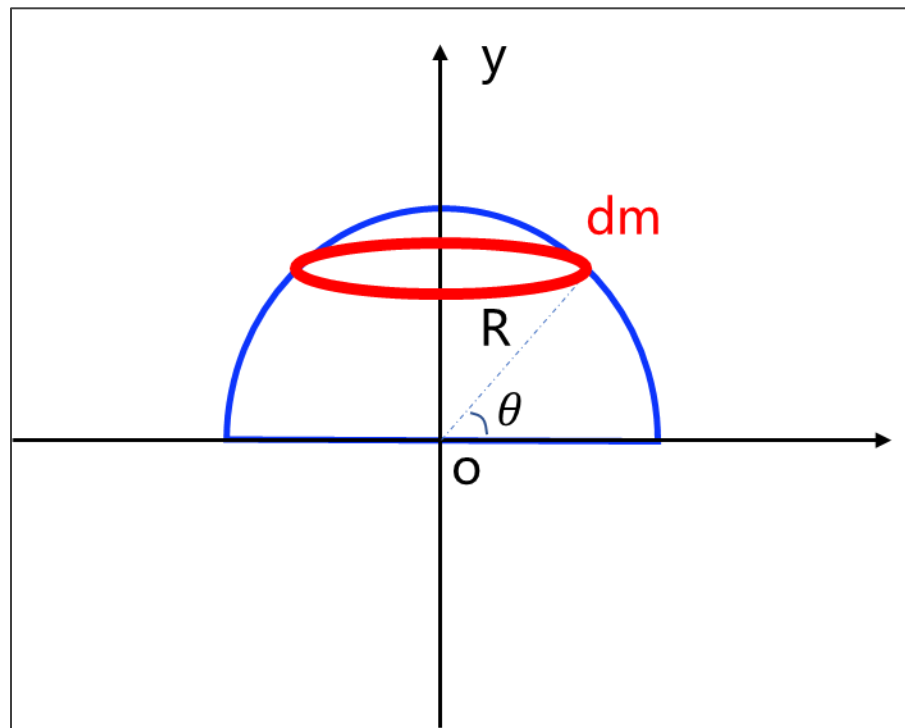
解: $dm = \lambda ds = \lambda R d\theta$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{m'} \int y dm = \frac{1}{m'} \int_0^\pi \lambda R y d\theta \\ &= \frac{1}{m'} \int_0^\pi \lambda R (R \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{\lambda R^2}{m'} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2\lambda R^2}{m'} = \frac{2\lambda R^2}{\lambda \pi R} \\ &= \frac{2}{\pi} R \end{aligned}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例20. 半球壳质心的求解



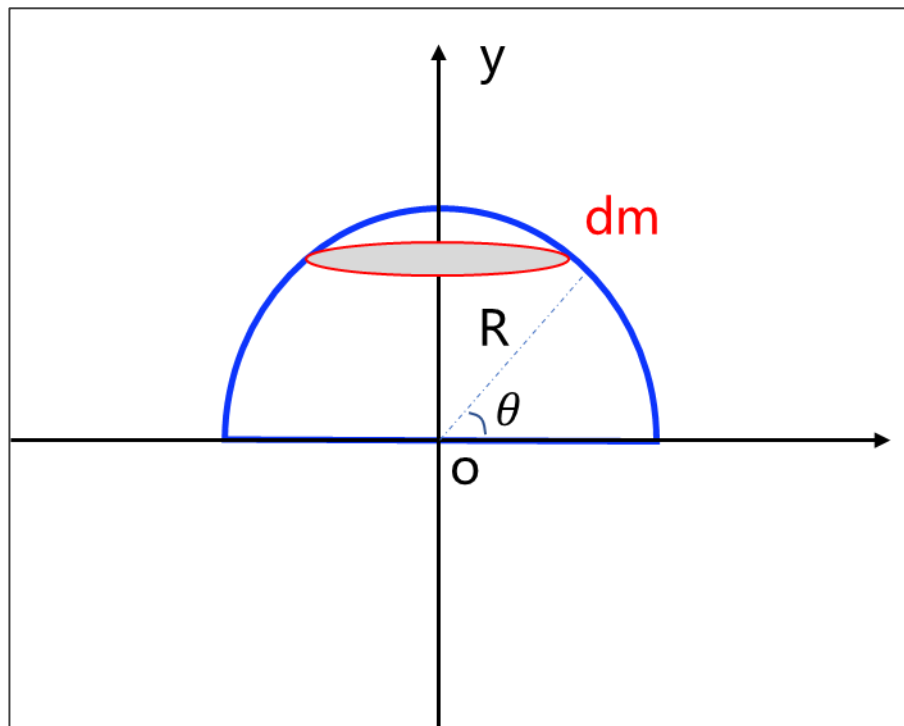
解: $dm = \sigma dS = \sigma 2\pi r dl$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{m'} \int y dm = \frac{1}{m'} \int R \sin \theta \cdot \sigma 2\pi r dl \\ &= \frac{2\pi\sigma}{m'} \int_0^{\pi/2} R \sin \theta \cdot R \cos \theta \cdot R d\theta \\ &= \frac{2\pi\sigma R^3}{m'} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2\pi\sigma R^3}{m'} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\pi\sigma R^3}{2\pi\sigma R^2} \cdot \frac{1}{2} = R/2 \end{aligned}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例21. 实心半球体质心的求解



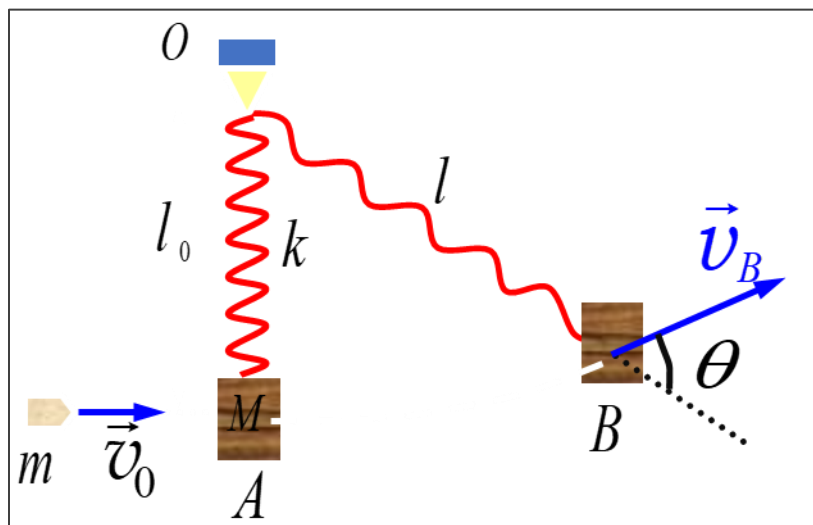
解： $dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dy$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{m'} \int y dm = \frac{1}{m'} \int R \sin \theta \cdot \rho \pi r^2 dy \\ &= \frac{\rho \pi}{m'} \int_0^{\pi/2} R \sin \theta \cdot R^2 \cos^2 \theta \cdot R \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\rho \pi R^4}{m'} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{3\pi R^4}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \\ &= 3R/8 \end{aligned}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例22. 光滑水平桌面上，一质量为 M 的木块与一原长为 l_0 ，劲度系数为 k 的轻弹簧相连，弹簧另一端固定于 O 点，木块静止，弹簧处于原长。一质量为 m 的子弹以初速 v_0 垂直射向 M 并嵌在木块中。求弹簧长度为 l 时木块速度的大小和速度方向与弹簧的夹角。



运动轨迹？

解：动量守恒：
$$v_1 = \frac{mv_0}{m+M}$$

机械能守恒：
$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = \frac{1}{2}(m+M)v_B^2 + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$
$$\rightarrow v_B = \sqrt{v_1^2 - k(l-l_0)^2 / (m+M)}$$

对 O 点角动量守恒：

$$l_0(m+M)v_1 = l(m+M)v_B \sin \theta$$



问题描述

在水平桌面上放置一个弹性系数为 k 的弹簧和质量为 m 的小球。弹簧的一端固定，另一端连接小球。初始时刻，给小球一个垂直于弹簧的瞬时冲量 I 。求小球在弹簧作用下的运动轨迹，不考虑小球与地面的摩擦。

最终答案

小球在任意时刻的坐标为：

$$x(t) = l_0, \quad y(t) = \frac{I}{m}t$$

即小球在 x 方向上保持静止，在 y 方向上做匀速直线运动。

明显错误啊！

再来追问

请在平面极坐标系下求解

最终答案

在平面极坐标系下，小球的运动轨迹由以下方程描述：

$$\dot{\theta} = \frac{Il_0}{mr^2}$$
$$m\ddot{r} - \frac{I^2 l_0^2}{mr^3} = -k(r - l_0)$$

其中：

- $r(t)$ 是弹簧的长度，需要通过数值方法求解非线性微分方程。
- $\theta(t)$ 是弹簧与固定方向的夹角，由 $\dot{\theta} = \frac{Il_0}{mr^2}$ 积分得到。

在弹簧非常刚性 (k 很大) 的情况下，小球的运动轨迹近似为匀速圆周运动，半径为 l_0 ，角速度为 $\frac{I}{ml_0}$ 。

7. 一般情况下的运动轨迹：

- 一般情况下， $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 需要通过数值方法求解非线性微分方程。
- 运动轨迹为一条螺旋线或闭合曲线，具体形状取决于初始条件和弹簧的弹性系数 k 。



继续追问

你能绘制出小球的运动轨迹吗？



由于我无法直接绘制图形，但我可以描述如何绘制小球的运动轨迹，并提供一个基于 Python 的代码示例，您可以在本地运行以绘制轨迹。

绘制小球运动轨迹的方法

1. 运动方程:

◦ 径向方程:

$$m\ddot{r} - \frac{I^2 l_0^2}{mr^3}$$

◦ 切向方程:

$$\dot{\theta} =$$

2. 数值求解:

◦ 使用数值方法 (如 Runge-Kutta 法) 求解径向

◦ 通过积分 $\dot{\theta} = \frac{I l_0}{mr^2}$ 求解 $\theta(t)$ 。

3. 转换为直角坐标系:

◦ 将极坐标 (r, θ) 转换为直角坐标 (x, y) :

$$x(t) = r$$

$$y(t) = r$$

4. 绘制轨迹:

◦ 使用绘图工具 (如 Matplotlib) 绘制 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的关系图。

Python 代码示例

以下是使用 Python 和 SciPy 库数值求解并绘制小球

```
python
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

# 参数设置
m = 1.0 # 质量
k = 10.0 # 弹性系数
l0 = 1.0 # 弹簧自然长度
I = 1.0 # 冲量

# 初始条件
r0 = l0 # 初始长度
dr0 = 0.0 # 初始径向速度
theta0 = 0.0 # 初始角度
dtheta0 = I / (m * l0) # 初始角速度

# 定义运动方程
def equations(t, y):
    r, dr, theta = y
    d2r = (I**2 * l0**2) / (m**2 * r**3) - (k
    dtheta = (I * l0) / (m * r**2)
    return [dr, d2r, dtheta]

# 初始条件向量
y0 = [r0, dr0, theta0]
```

代码说明

1. 参数设置:

◦ 质量 m 、弹性系数 k 、弹簧自然长度 l_0 、冲量 I 可根据实际情况调整。

2. 运动方程:

◦ `equations` 函数定义了径向和切向的运动方程。

3. 数值求解:

◦ 使用 `solve_ivp` 求解微分方程。

4. 轨迹绘制:

◦ 将极坐标转换为直角坐标，并绘制 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的关系图。

运行结果

运行代码后，您将看到小球的运动轨迹图。轨迹的形状取决于参数 k 和 I :

- 如果 k 较大，轨迹接近圆形。
- 如果 k 较小，轨迹可能为螺旋线或其他复杂形状。

希望这段代码对您有帮助！如果有任何问题，请随时告诉我。



继续追问

如果考虑小球和地面的滑动摩擦系数，能否给出小球的运动的方程



如果考虑小球与地面的滑动摩擦，摩擦力的方向与小球的速度方向相反，大小为 $f = \mu mg$ ，其中 μ 是滑动摩擦系数， g 是重力加速度。摩擦力会影响小球的运动，因此需要在运动方程中加入摩擦力项。

简化后的运动方程

将上述方程整理后，得到：

1. 径向方程：

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}(r - l_0) - \mu g \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}}$$

2. 切向方程：

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \mu g \frac{\dot{\theta}}{r\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}}$$

初始条件

- 初始位置： $r(0) = l_0$, $\theta(0) = 0$ 。
- 初始速度： $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \frac{I}{ml_0}$ 。

代码说明

1. 摩擦力的计算：

- 根据速度方向计算摩擦力的径向和切向分量。
- 如果速度为 0，摩擦力为 0。

2. 数值求解：

- 使用 `solve_ivp` 求解微分方程。

3. 轨迹绘制：

- 将极坐标转换为直角坐标，并绘制 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的关系图。

运行结果

运行代码后，您将看到小球在考虑摩擦力情况下的运动轨迹。由于摩擦力的作用，小球的运动能量会逐渐耗散，轨迹会逐渐收缩并最终停止。

如果有任何问题，请随时告诉我！



继续追问

如果弹簧发生弯曲，应该怎么处理呢？



如果弹簧发生弯曲，问题将变得更加复杂，因为需要考虑弹簧的弹性形变和弯曲对小球运动的影响。这种情况下，弹簧不再是一个简单的线性弹簧，而是一个具有分布质量的弹性体。为了简化问题，我们可以采用以

1. 弹簧的弹性形变模型

假设弹簧的弯曲可以用弹性力学中的梁模型来描述。弹簧的形变可以用横向位移 $u(x, t)$ 表示， x 是弹簧的轴向坐标， t 是时间。

运动方程：

2. 小球的运动方程

3. 耦合系统的运动方程

弹簧的弯曲和小球的运动

4. 数值求解

由于耦合系统的运动方程是偏微分方程，通常需要数值方法（如有限差分法或有限元法）进行求解。以下是使用 Python 和 SciPy 库的代码示例：

运行结果

运行代码后，您将看到小球在考虑弹簧弯曲情况下的横向位移随时间的变化。由于弹簧的弯曲和小球的运动是耦合的，位移的变化会逐渐衰减，最终趋于稳定。

如果有任何问题，请随时告诉我！

边界条件：

- 固定端： $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$
- 自由端（连接小球）：需要考虑小球的惯性力和弹簧的弹性力。

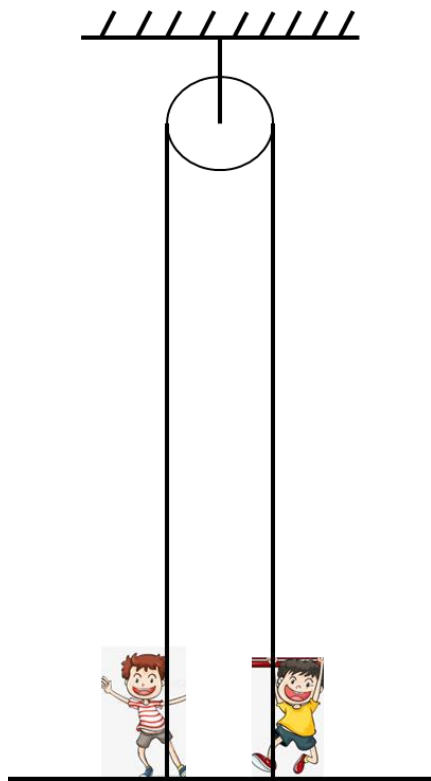
- μ 是滑动摩擦系数。
- g 是重力加速度。

- 自由端：需要考虑小球的惯性力和弹簧的弹性力。



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例23. 天花板有一个定滑轮，有两个质量相等的小朋友，各自抓着跨过滑轮绳子的两端。若一个孩子用力向上爬，另一个则抓住绳子不动。忽略滑轮的质量和轴上的摩擦，问哪个小朋友先到达滑轮？为什么？



思维拓展1：小朋友质量不等会如何？

思维拓展2：如果不能忽略滑轮质量怎么处理？

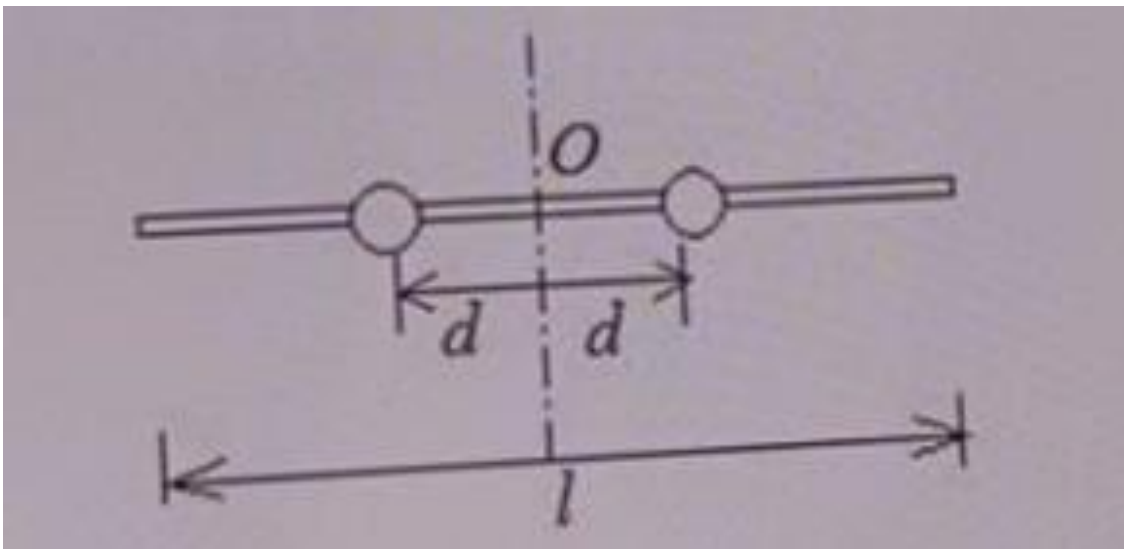
思维拓展3：如果不能忽略摩擦怎么处理？

思维拓展4：若绳子与滑轮之间有相对滑动，怎么处理？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例24. 如图所示，一水平**刚性轻杆**，质量不计，杆长 **$l=20\text{ cm}$** ，其上穿有两个小球，初始时，两小球相对杆中心 **O** 对称放置，与 **O** 的距离 **$d=5\text{ cm}$** ，二者之间用细线拉紧。现在让细杆绕通过中心 **O** 的竖直固定轴作匀角速的转动，转速为 **ω_0** ，再烧断细线让两球向杆的两端滑动。不考虑转轴的和空气的摩擦，当两球都滑至杆端时，杆的角速度为_____。



思考：小球沿杆加速的动力是？

解： 设杆角速度 $\omega(r)$ ，小球沿杆速度 $v(r)$

角动量守恒：

$$2md^2\omega_0 = 2mr^2\omega \quad \rightarrow \quad \omega(r) = \frac{d^2}{r^2}\omega_0$$

机械能守恒：

$$md^2\omega_0^2 = m(r^2\omega^2 + v^2)$$

$$\rightarrow v(r) = \sqrt{d^2\omega_0^2 - r^2\omega^2} = d\omega_0\sqrt{1 - \frac{d^2}{r^2}}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例24. 如图所示，一水平**刚性轻杆**，质量不计，杆长 **$l=20\text{ cm}$** ，其上穿有两个小球，初始时，两小球相对杆中心O对称放置，与O的距离 **$d=5\text{ cm}$** ，二者之间用细线拉紧。现在让细杆绕通过中心O的竖直固定轴作匀角速的转动，转速为 **ω_0** ，再烧断细线让两球向杆的两端滑动。不考虑转轴的和空气的摩擦，当两球都滑至杆端时，杆的角速度为_____。

若考虑杆质量为M呢？

解： 设杆角速度 **$\omega(r)$** ，小球沿杆速度 **$v(r)$**

角动量守恒：

$$2md^2\omega_0 + \frac{1}{12}Ml^2\omega_0 = 2mr^2\omega + \frac{1}{12}Ml^2\omega \quad \rightarrow \quad \omega(r) = \frac{md^2 + \frac{1}{12}Ml^2}{mr^2 + \frac{1}{12}Ml^2} \omega_0$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}mv_r^2 \quad \text{with} \quad \begin{cases} J_0 = \frac{1}{12}Ml^2 + 2md^2 \\ J = \frac{1}{12}Ml^2 + 2mr^2 \end{cases}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例25. 一均匀细棒长 l 质量为 m

1) 轴 z_1 过棒的中心且垂直于棒;

2) 轴 z_2 过棒一端且垂直于棒;

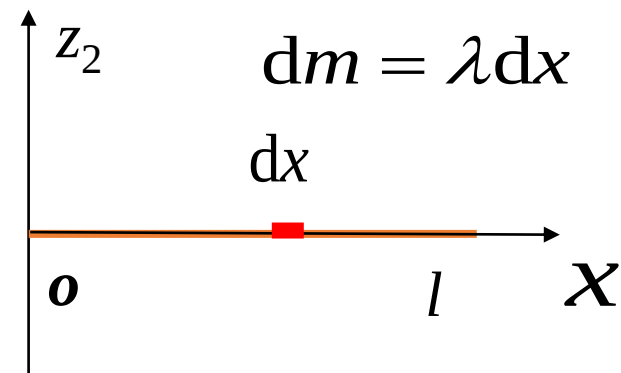
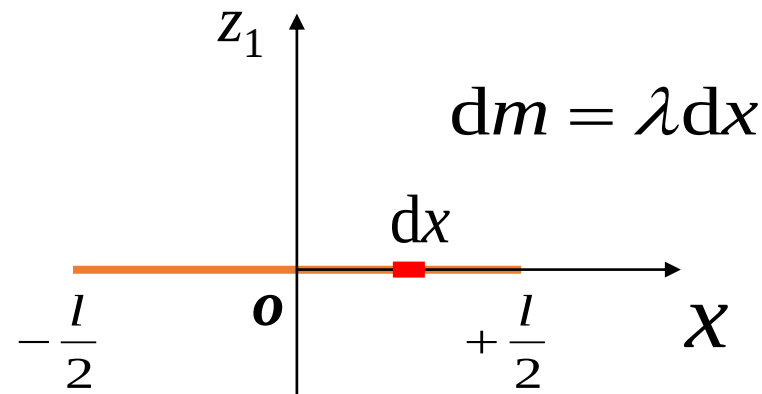
求: 上述两种情况下的转动惯量。

解: 棒质量的线密度 $\lambda = m / l$

$$J_{z_1} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} ml^2$$

$$J_{z_2} = \int_0^l x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} ml^2$$

只有指出刚体对某轴的转动惯量才有意义

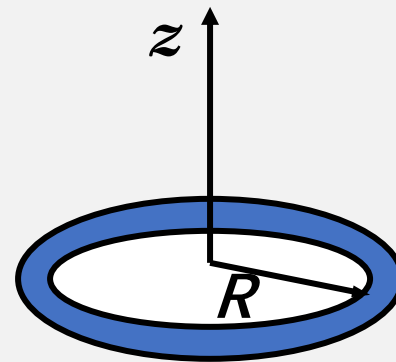




2. 典型例题 —— ① 力学部分

例26. 求均匀圆环绕垂直于环面通过中心轴的转动惯量。

解: $J_z = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$

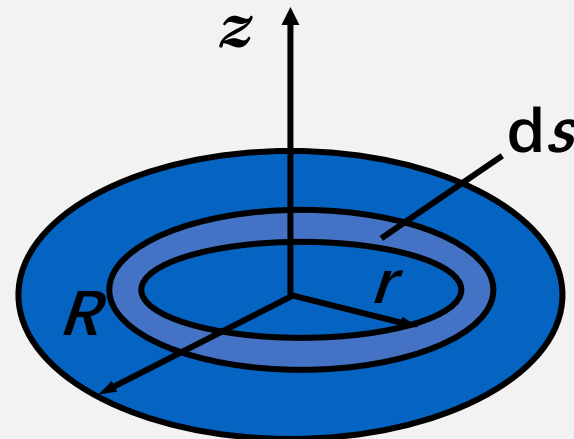


例27. 求均匀圆盘绕垂直于盘面通过中心轴的转动惯量。

解: 设圆盘半径为 R , 总质量为 m ,

则质量面密度 $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$

$$\begin{aligned} J_z &= \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma ds = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr \\ &= \int_0^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2} mR^2 \end{aligned}$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例28. 平行轴定理

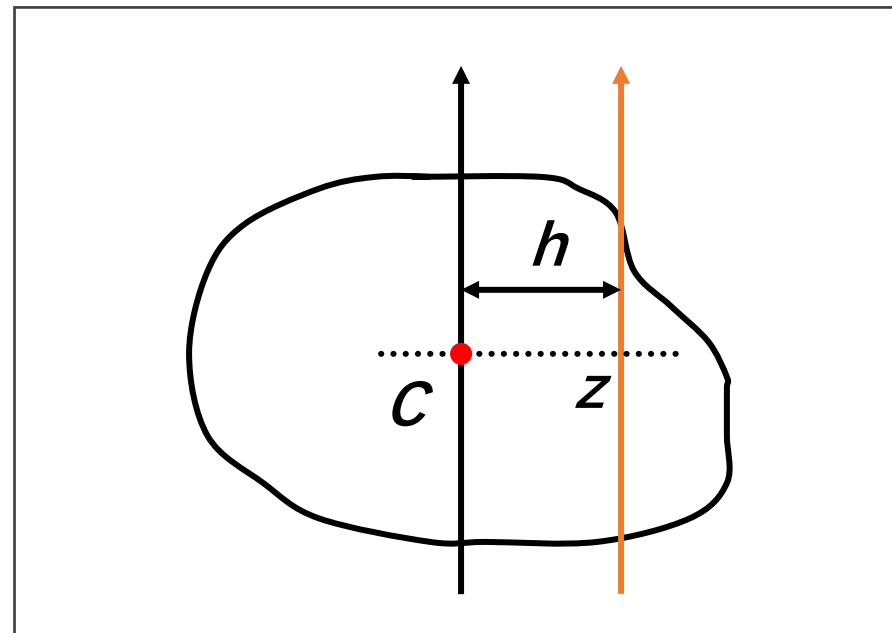
$$J_z = J_c + mh^2$$

式中：

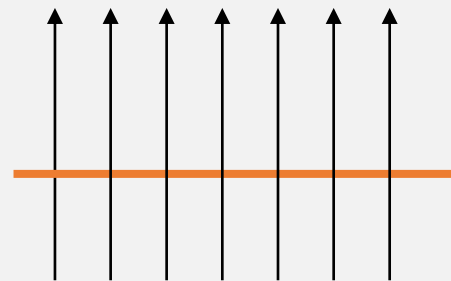
J_c ——通过质心轴的转动惯量；

m ——刚体质量， h 是 c 到 z 的距离；

J_z ——关于平行于通过质心轴的一个轴的转动惯量。



细棒对任意轴的转动惯量？





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例29. 垂直轴定理

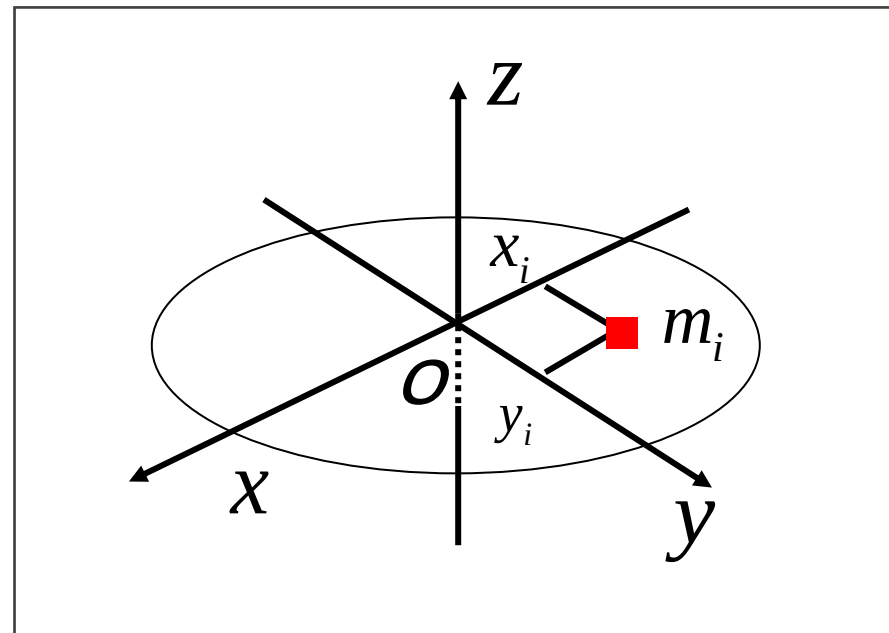
对于薄板刚体：

$$J_z = J_x + J_y$$

J_x —— 薄板刚体对 x 轴的转动惯量

J_y —— 薄板刚体对 y 轴的转动惯量

J_z —— 薄板刚体对 z 轴的转动惯量



例30. 求圆盘对过自身直径转轴的转动惯量？

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{4} mR^2$$

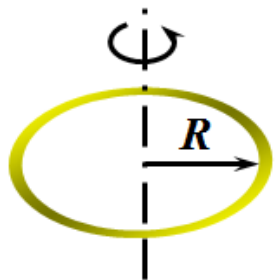


2. 典型例题 —— ① 力学部分

例31. 常见均匀刚体的转动惯量

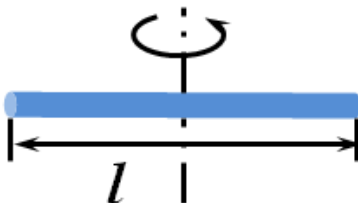
常见(均匀)刚体的转动惯量

圆环对中心轴



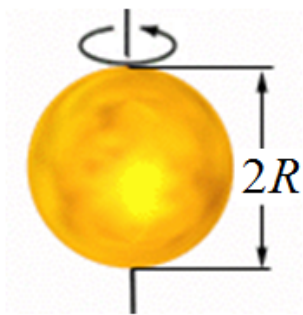
$$J = mR^2$$

细杆对中心轴



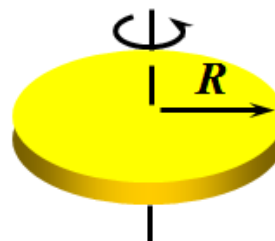
$$J = \frac{1}{12}ml^2$$

球体对直径



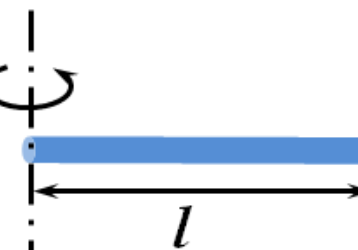
$$J = \frac{2}{5}mR^2$$

圆盘对中心轴



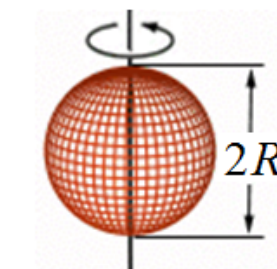
$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

细杆对一端垂直轴



$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

薄球壳对直径



$$J = \frac{2}{3}mR^2$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例32. 已知：滑轮 M （看成匀质圆盘）半径 R ，
物体 $m_1 > m_2$ 。求： $a = ?$

解： ~~$m_1 g - T = m_1 a$~~

~~$T - m_2 g = m_2 a$~~

$$T_1 \neq T_2$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

对否？

否则滑轮匀速转动，而
物体加速运动

解： $m_1 g - T_1 = m_1 a$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

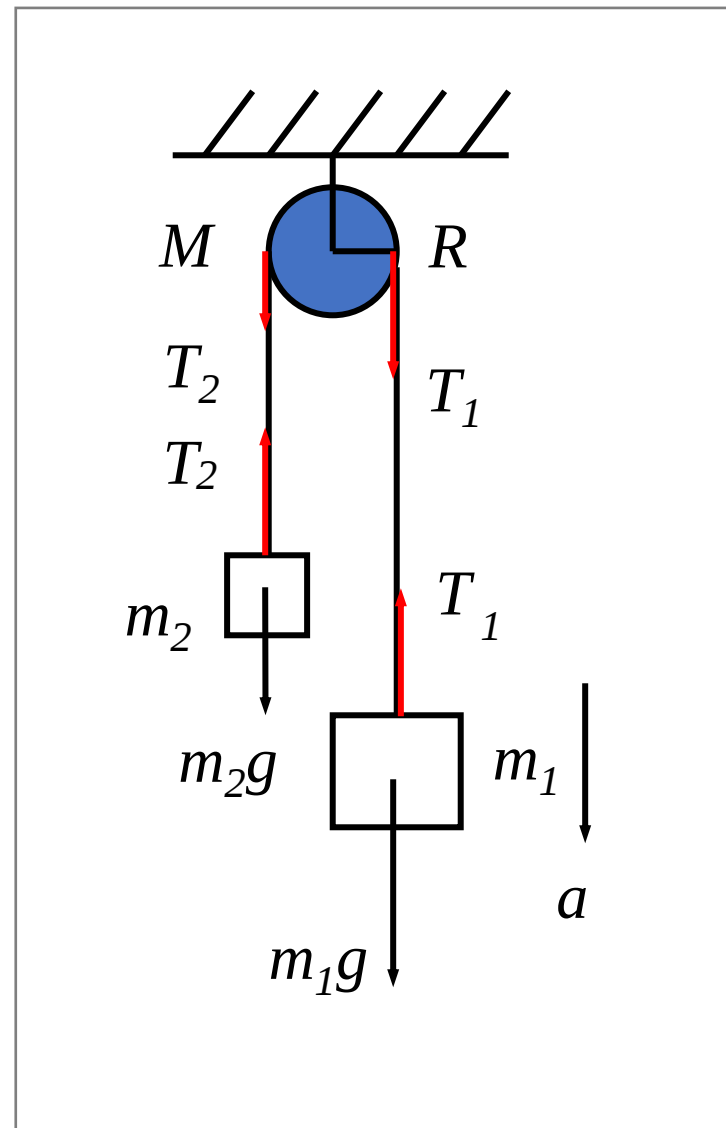
$$J = \frac{1}{2} M R^2$$

转动定律 $T_1 R - T_2 R = J \alpha$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g$$

线量与角量关系

$$a = R \alpha$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例33. 已知：匀质杆 m ，长 l ，下落到 θ 时

求： $\omega = ?$ $\alpha = ?$ $\vec{F} = ?$

解： $M = \frac{1}{2} l \cos \theta \cdot mg$

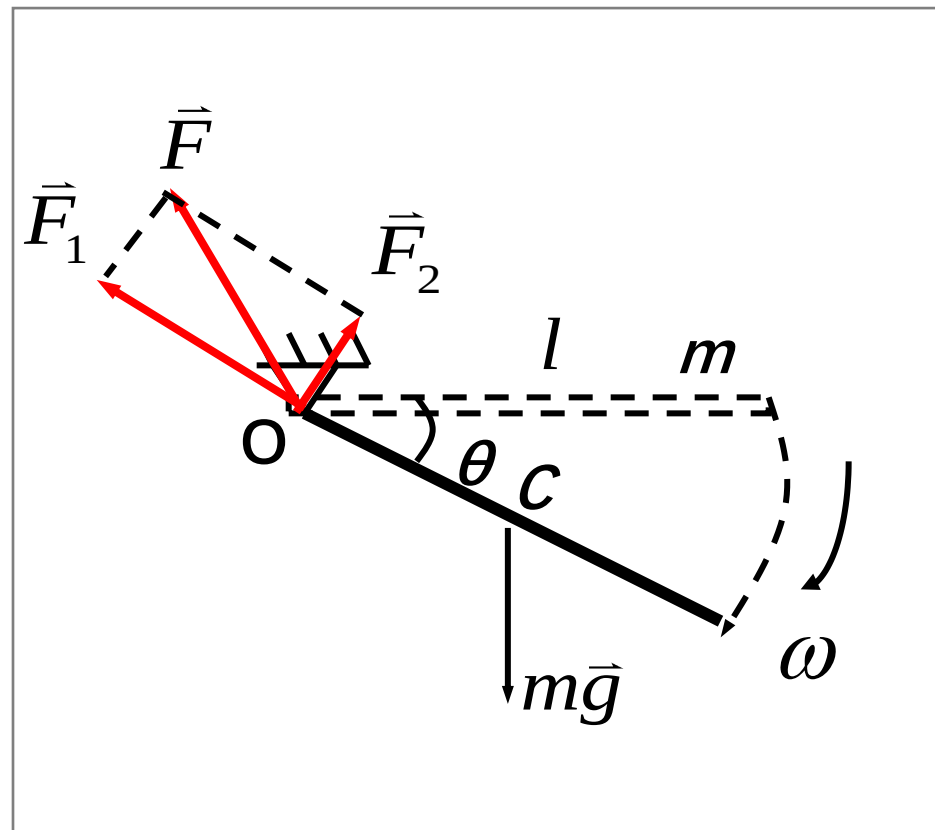
$$J = \frac{1}{3} ml^2$$

转动定律

$$M = J\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g \cos \theta}{2l} d\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$$



核心问题：怎么求力？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例33. 已知：匀质杆 m ，长 l ，下落到 θ 时

求： $\omega = ?$ $\alpha = ?$ $\vec{F} = ?$

对杆应用
质心运动定理

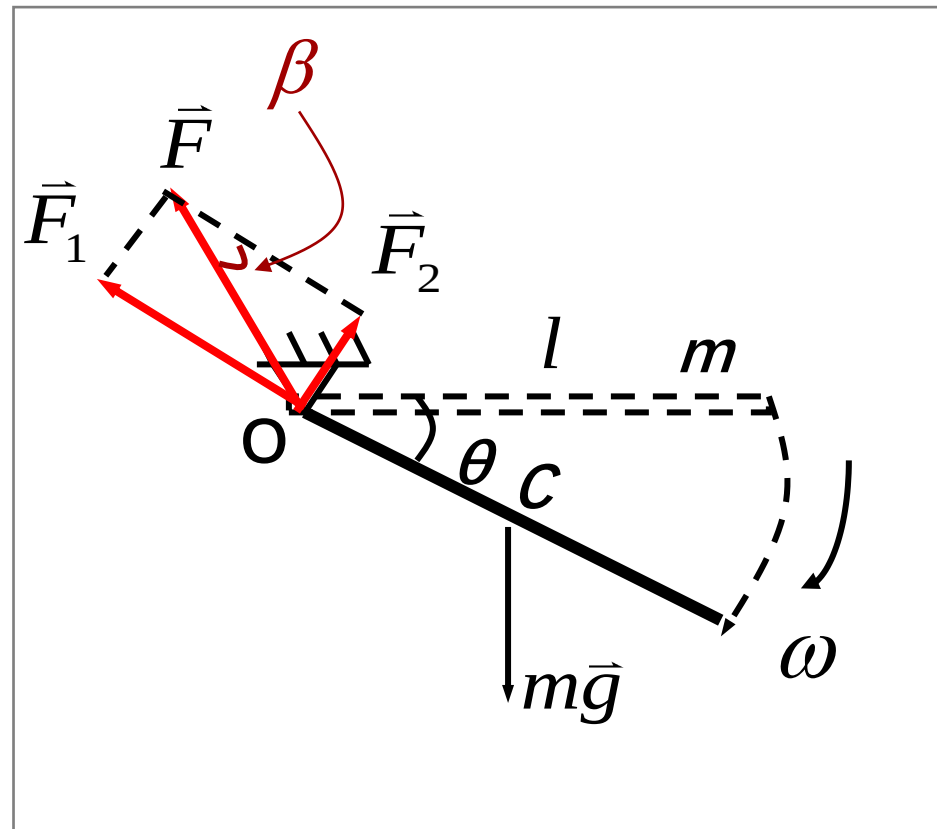
$$F_1 - mg \sin \theta = ma_n$$

$$mg \cos \theta - F_2 = ma_t$$

$$a_n = \frac{1}{2} l \omega^2 = \frac{3g \sin \theta}{2}, \quad a_t = \frac{l}{2} \alpha = \frac{3g \cos \theta}{4}.$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{5}{2} mg \sin \theta, \quad F_2 = \frac{1}{4} mg \cos \theta.$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \frac{1}{4} mg \sqrt{99 \sin^2 \theta + 1}.$$



$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{F_2}{F_1} = \frac{\cos \theta}{10 \sin \theta}.$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例34. 绳剪断的瞬间

$$T = \frac{1}{2}mg? \quad T > \frac{1}{2}mg? \quad T < \frac{1}{2}mg?$$

解：质心运动定理：

$$mg - T = ma_c$$

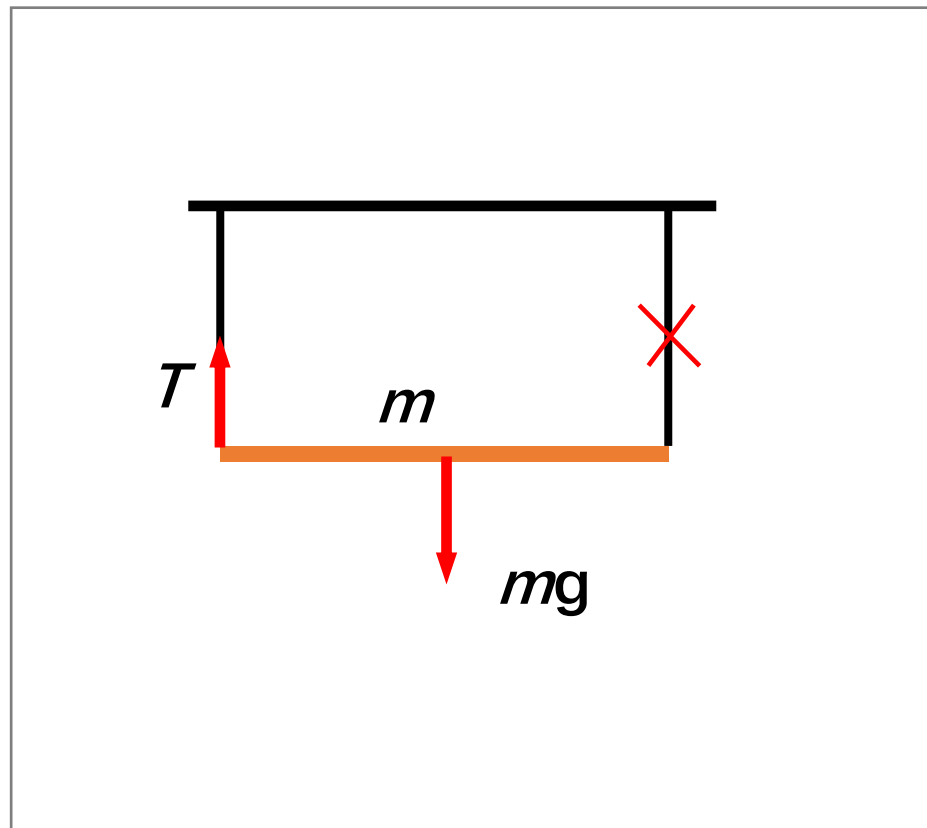
转动定律：

$$mg \frac{l}{2} = \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\alpha$$

角量和线量关系：

$$a_c = \alpha \frac{l}{2}.$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4}mg.$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例35. 匀质圆盘 m ，拉绳的加速度 a 为多大时圆盘能够相对地面静止，此时绳子中的拉力 f 多大？

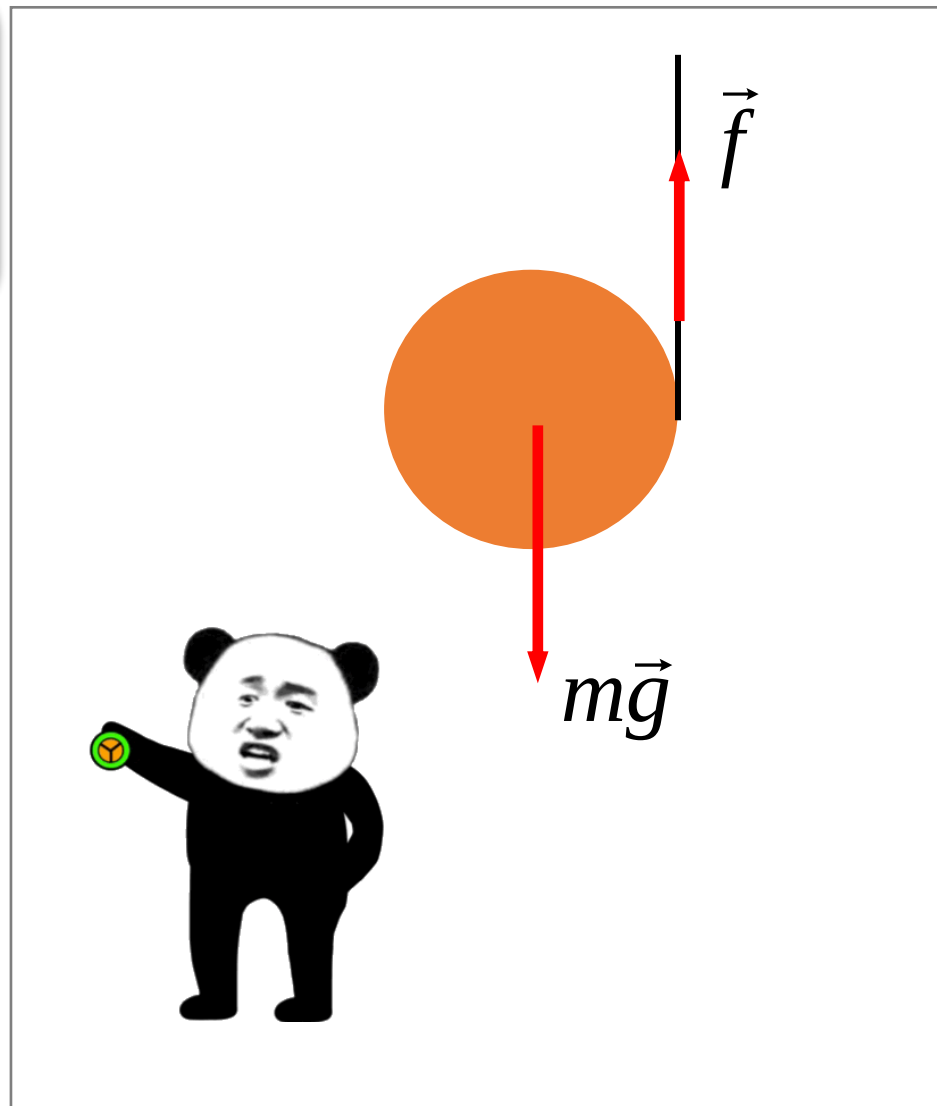
解： 质心运动定理：

$$f - mg = ma_c = 0 \quad \Rightarrow f = mg.$$

转动定律：

$$fR = \frac{1}{2}mR^2\alpha = \frac{1}{2}mRa$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2}ma. \quad \Rightarrow a = 2g.$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例36. 2023春答疑例题

2. 设三个斜面的高度 h 和水平长度 l 均相同，斜面与物体间的摩擦因数 μ 也相等。如图所示，当物体分别沿三个斜面从顶端滑到地面时速度最大的是
- (A) 沿斜面 A (B) 沿斜面 B (C) 沿斜面 C (D) 其中任意一个斜面

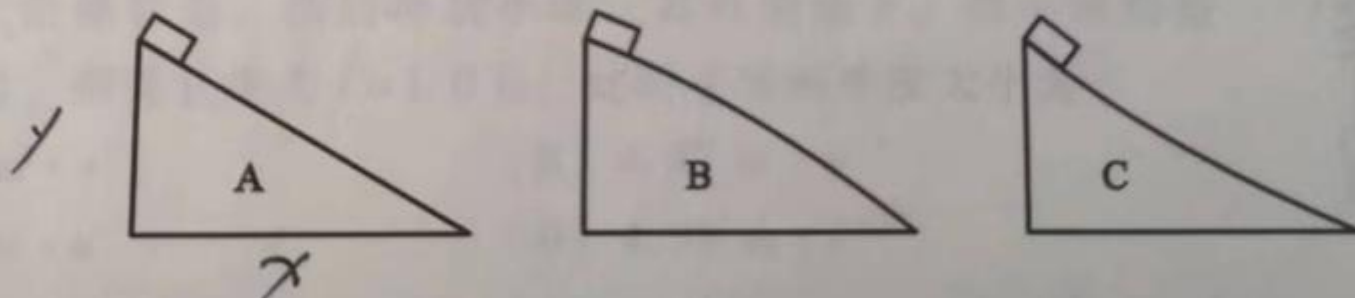


图 4-1

【2023春答疑】假定斜面水平方向为x轴，长度为 L ，任意点法向与竖直方向夹角是 θ ，分析如下：

- 几何关系： $ds = \frac{dx}{\cos \theta}$
- 摩擦力： $f = \mu N$
- 凹面： $N > mg \cos \theta$ 因此： $dA = f ds > \mu mg dx$ 摩擦力总做功： $A > \mu mg L$
- 凸面： $N < mg \cos \theta$ 因此： $dA = f ds < \mu mg dx$ 摩擦力总做功： $A < \mu mg L$



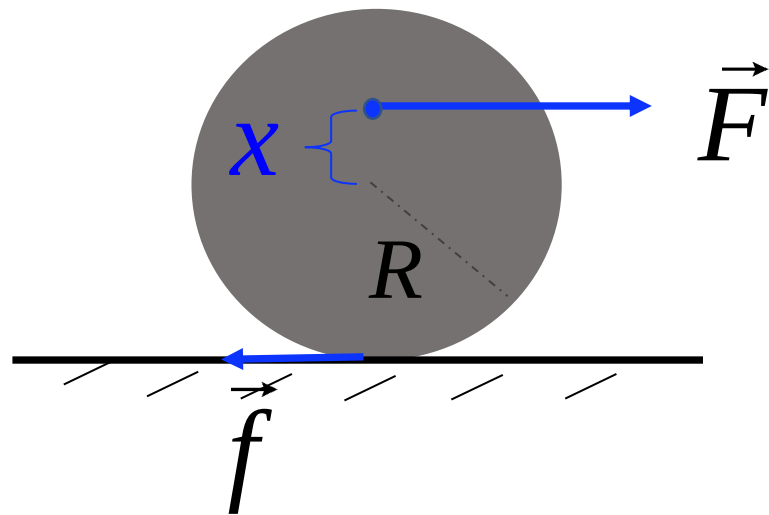
2. 典型例题 —— ① 力学部分

例37. 纯滚动&滚动摩擦的考题

思考题

均匀圆盘在水平恒力作用下**向右做纯滚动**（与地面无相对滑动）如右侧图所示。圆盘半径为 R ，力始终作用在圆盘质心正上方 x 处。

请判断：圆盘与地面摩擦力的大小与方向？与 x 的关系如何？





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例37. 纯滚动&滚动摩擦的考题

解：设静摩擦力的方向如图示

$$F - f = ma_c$$

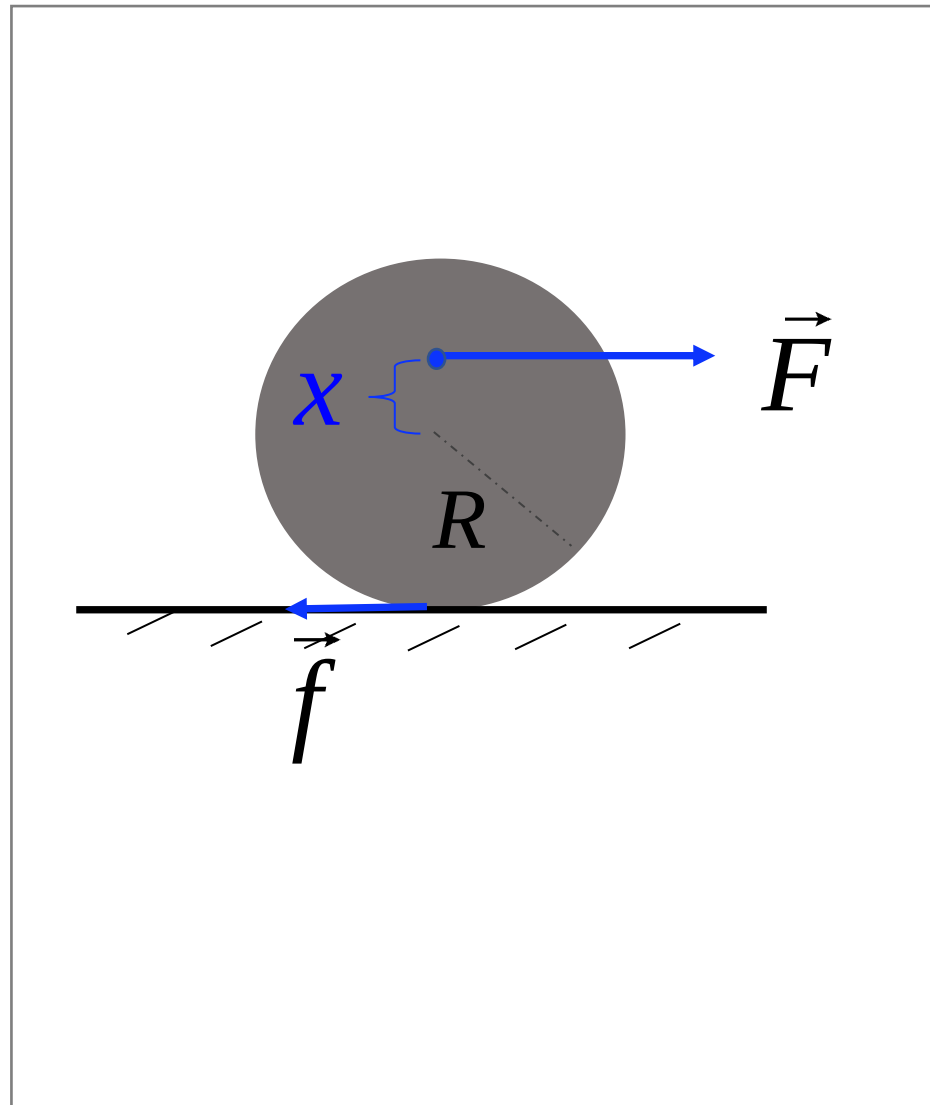
$$Fx + fR = J_c \alpha = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a_c}{R} = \frac{R}{2} ma_c$$

$$\Rightarrow f = \frac{F}{3} \left(1 - \frac{2x}{R}\right). \quad a_c = \frac{F}{m} - \frac{F(R-2x)}{3Rm} = \frac{2F}{3m} \left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

$$x = \frac{R}{2} \quad f = 0 \quad \text{静摩擦力为0}$$

$$x < \frac{R}{2} \quad f > 0 \quad \text{静摩擦力的方向向后}$$

$$x > \frac{R}{2} \quad f < 0 \quad \text{静摩擦力的方向向前}$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例38. 圆盘纯滚动、平面平行运动的总动能

1. 圆盘的纯滚动问题

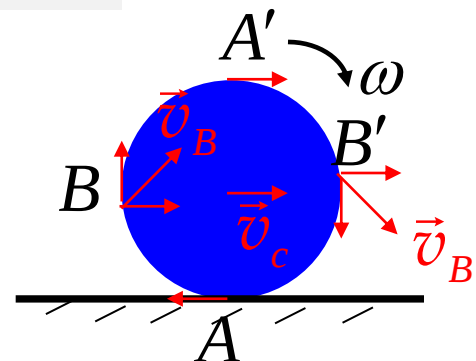
$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}_A; \quad v_A = 0 \quad \text{思考为什么?}$$

$$\vec{v}_{A'} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}_{A'}; \quad v_{A'} = 2v_c$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}_B;$$

$$\vec{v}_{B'} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}_{B'}; \quad |\vec{v}_B| = |\vec{v}_{B'}| = \sqrt{v_c^2 + v_c^2} = \sqrt{2}v_c$$



2. 平面平行运动刚体的总动能

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

平动动能 + 绕质心转动的动能



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例39. 匀质圆柱体 m 半径 r ，从质心距地面高为 h 的滑道上静止**纯滚动**而下，进入半径 R 的圆形滑道，问：此圆柱体能在圆形滑道内完成圆周运动， h 至少多大？

解： 系统机械能守恒： **为什么？**

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mg(2R-r)$$

$$\Rightarrow v_c^2 = \frac{4}{3}g(h-2R+r)$$

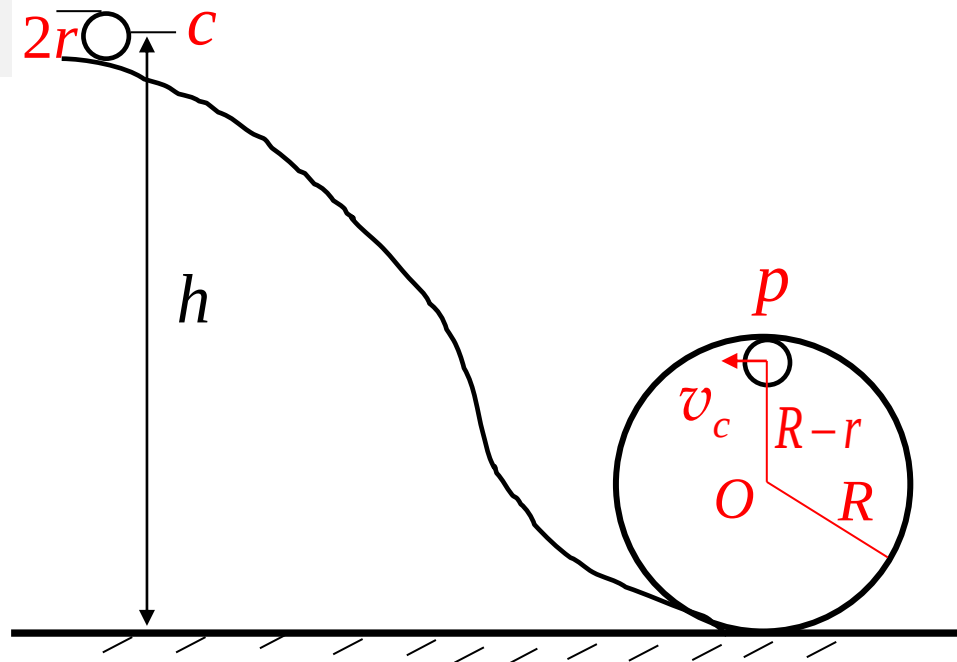
$$F_n + mg = m\frac{v_c^2}{R-r} \quad \text{为什么？}$$

临界条件： $F_n \geq 0$

$$\Rightarrow v_c^2 \geq g(R-r) \quad \Rightarrow h \geq \frac{11}{4}R - \frac{7}{4}r.$$

纯滚动

$$v_c = r\omega$$

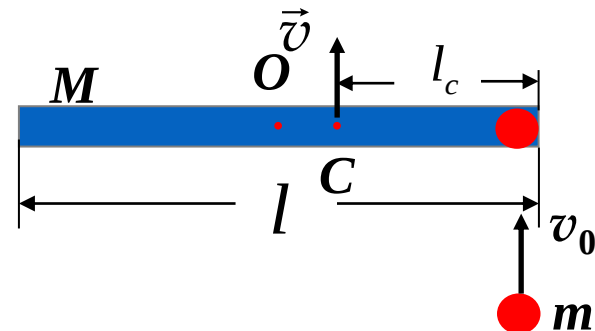


请思考：当 $r \rightarrow 0$ 时，是否**过渡到质点**的情况？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例40. 小球 m , v_0 在水平冰面上滑动, 撞在细木棒 M , l 的一端, 并**粘附**在木棒上。试求: (1)忽略摩擦, 定量地描述小球附在木棒后, 系统运动情况。(2)刚发生碰撞之后, 木棒上有一点 P 是瞬时静止的, 问该点在何处?



解: 研究对象: 棒和球组成的系统

物理过程: 碰后系统质心匀速直线运动, 同时系统绕质心匀速转动。

(1) 系统质心位置 C
$$l_c = \frac{M \cdot l / 2}{M + m} = \frac{Ml}{2(M + m)}$$

动量守恒

$$mv_0 = (M + m)v_c \quad \Rightarrow v_c = \frac{mv_0}{(M + m)}$$

角动量守恒

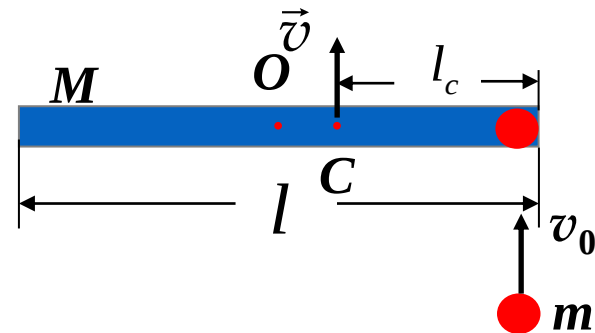
$$mv_0 l_c = [ml_c^2 + \frac{1}{12}Ml^2 + M(\frac{l}{2} - l_c)^2]\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{6mv_0}{(4m + M)l}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例40. 小球 m , v_0 在水平冰面上滑动, 撞在细木棒 M , l 的一端, 并**粘附**在木棒上。试求: (1)忽略摩擦, 定量地描述小球附在木棒后, 系统运动情况。(2)刚发生碰撞之后, 木棒上有一点 P 是瞬时静止的, 问该点在何处?



分析: (2) 瞬时静止点 P 应在质心的左侧, P 点绕质心转动瞬时向下线速度应等于质心平动速度 v_c

$$\overline{PC} \cdot \omega = v_c \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} = \frac{v_c}{\omega} = \frac{l}{6} \frac{(4m + M)}{(m + M)}$$

思考1: 若 $m \ll M$, 该点在哪个位置? 碰撞后运动状态如何?

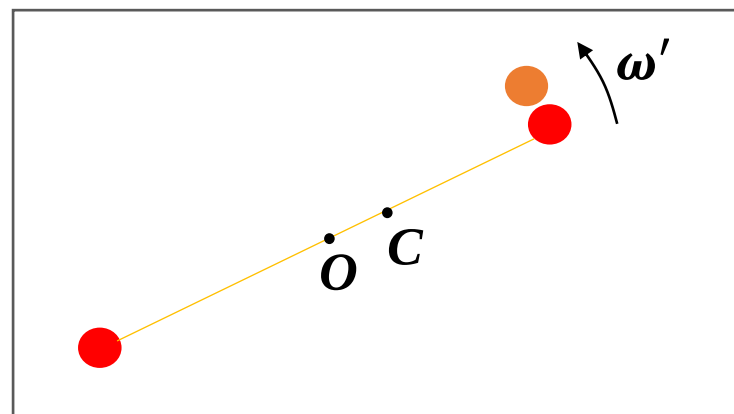
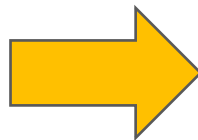
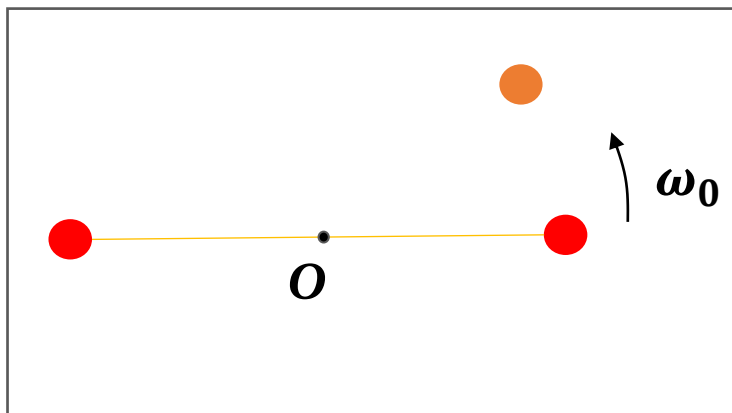
思考2: 若 $m \gg M$, 该点在那个位置? 碰撞后运动状态如何?

思考3: 可否求出杆上任意点的瞬时速度?



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例41. 有两个质量都是 m 的质点,由长度为 a 的一根轻质硬杆连接在一起,在自由空间二者质心静止,但杆以角速度 ω_0 绕质心转动。杆上的一个质点与第三个质量也是 m 但静止的质点发生碰撞,结果粘在一起。求: (1) 碰撞前一瞬间这三个质点对**它们的质心**的总角动量是多少? (2) 碰后一瞬间又是多少? (3) 碰撞后整个系统绕质心转动的角速度 ω' 多大?





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例42. 已知：静止匀质杆 M , l , 水平光滑轴竖直悬挂，子弹 m , 以水平速度 $\vec{v}_0$ 射入杆的下端，求：杆和子弹开始运动瞬时杆的质心速度。

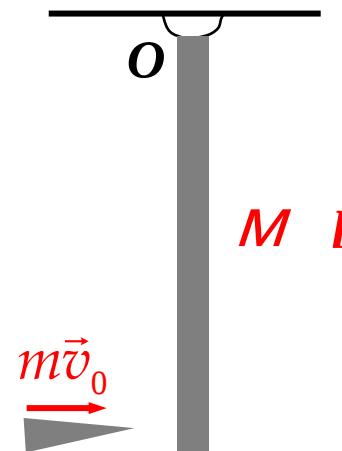
解：

动量是否守恒？

角动量是否守恒？

$$mv_0 l = (J_m + J_M) \omega = (ml^2 + \frac{1}{3} Ml^2) \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0}{(M/3 + m)l} \Rightarrow v_c = \omega \frac{l}{2} = \frac{3mv_0}{2(M + 3m)}$$



若子弹击在距O点 $\frac{2}{3}l$ 处，质心速度？

$$mv_0 \frac{2}{3}l = [m(\frac{2}{3}l)^2 + \frac{1}{3} Ml^2] \omega \Rightarrow \omega = \frac{6mv_0}{(3M + 4m)l} \Rightarrow v_c = \frac{l}{2} \omega = \frac{mv_0}{M + \frac{4}{3}m}$$

有同学利用动量守恒

$$mv_0 = Mv_c + mv \Rightarrow v_c = \frac{l}{2} \omega \Rightarrow v_c = \frac{l}{2} \omega = \frac{mv_0}{M + \frac{4}{3}m}$$

为何两个答案相同呢？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例43. 已知：静止匀质杆 M , l , 水平光滑轴竖直悬挂，子弹 m , 以水平速度 $\vec{v}_0$ 射入杆的下端 x 处 ($x < l$)，求：碰撞瞬间 O 点的作用力大小和方向？

解：

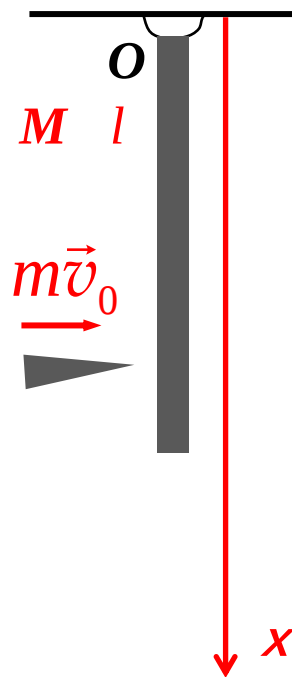
$$mv_0x = (J_m + J_M)\omega = (mx^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{mxv_0}{mx^2 + Ml^2/3}.$$

系统水平方向的初末动量分别为：

$$p_{\text{初}} = mv_0$$

$$p_{\text{末}} = mx\omega + Ml\omega/2$$

【解析】 水平方向系统动量的改变必然是由于受到了水平冲力。**当且仅当初、末水平方向动量相等时**该冲力无水平分量。联立可得： $x = 2l/3$ 时， O 点冲力无水平分量！





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例44. 已知：匀质圆盘 M_1, R_1, ω_0 ; M_2, R_2 静止。
求：两轮无相对滑动时 $\omega_1 = ? \omega_2 = ?$

解： 两轮无相对滑动时

$$v_1 = v_2 \quad \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

能否用角动量守恒？如：

$$J_1 \omega_0 = J_1 \omega_1 - J_2 \omega_2$$

$$J_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2$$

$$J_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2$$

纯粹乱来！

该方法错在哪里？

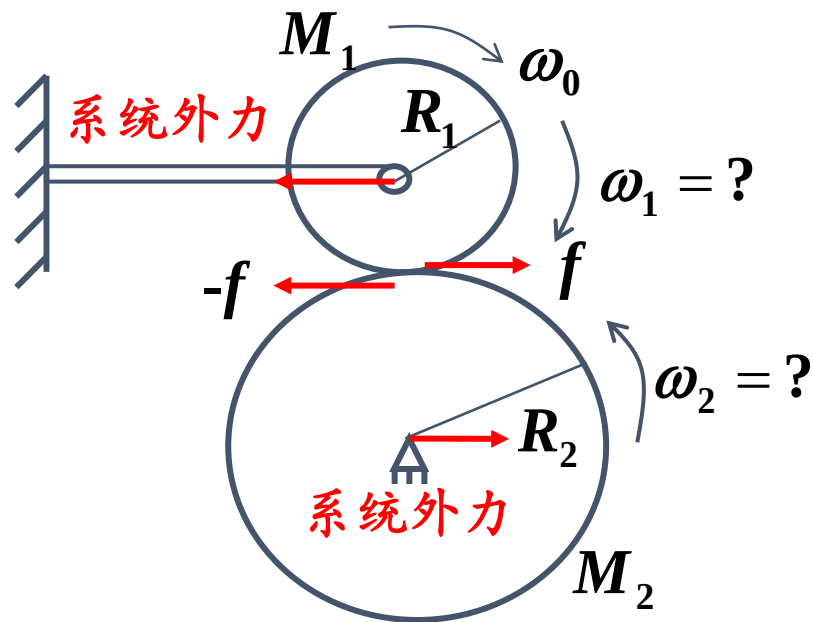
$$-fR_1 \Delta t = J_1 \omega_1 - J_1 \omega_0$$

$$fR_2 \Delta t = J_2 \omega_2$$

解得

$$\omega_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \omega_0$$

$$\omega_2 = \frac{R_1 M_1}{R_2 (M_1 + M_2)} \omega_0$$



延申：可否求出 $\Delta t = ?$

需知道摩擦系数 μ



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例45. 均匀圆柱体 m, R , 沿倾角 θ 的粗糙斜面, 在距地面 h_0 处静止开始无滑下滚 (纯滚动)。试求:

(1) 圆柱体下降到高 h 时, 它的质心速度 v_c 和转动角速度 ω ; (2) 摩擦力应满足的条件。

解: (1) 纯滚动, A 点瞬时速度

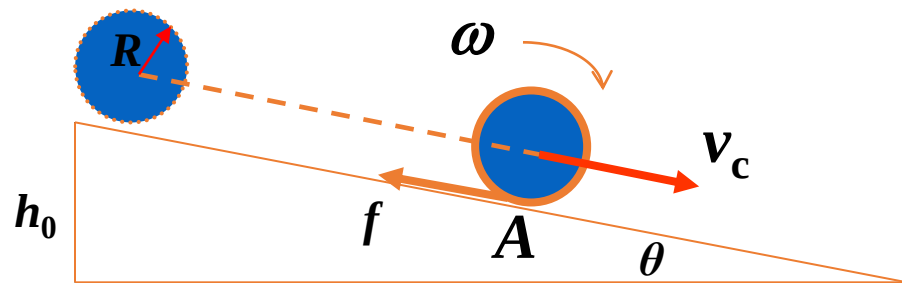
$$v_A = 0 \quad \text{摩擦力不做功}$$

机械能守恒

$$mg(h_0 + R) = mg(h + R) + \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

解得

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}g(h_0 - h)}. \quad \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}g(h_0 - h)}.$$



$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

$$v_c = R\omega$$

摩擦力怎么考虑?



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例45. 均匀圆柱体 m, R , 沿倾角 θ 的粗糙斜面, 在距地面 h_0 处静止开始无滑下滚 (纯滚动)。试求:

(1) 圆柱体下降到高 h 时, 它的质心速度 v_c 和转动角速度 ω ; (2) 摩擦力应满足的条件。

解: (2) 由质心运动定理

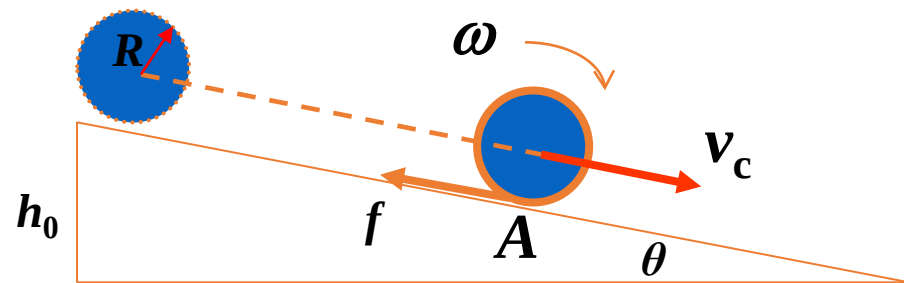
$$mg \sin \theta - f = ma_c$$

以质心为参考点, 由转动定律

$$Rf = J_c \alpha = \frac{1}{2} mR^2 \alpha$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{3} mg \sin \theta.$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta.$$



$$v_c = R\omega$$

$$a_c = R\alpha$$

要保证无滑滚动, 摩擦力 f 不能大于静摩擦力, 即

$$f \leq \mu N = \mu mg \cos \theta.$$

$$\Rightarrow \mu \geq \frac{1}{3} \tan \theta.$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例46. 半径为 R 的圆木以角速度 ω_0 在水平地面上作纯滚动，在前进的路上撞在一高度为 h 的台阶并发生**完全非弹性碰撞**，即碰撞后圆木**不弹回**。圆木与台阶前缘之间的摩擦系数**足够大**，要原木能够翻上台阶而又不跳离台阶，对台阶的高度有什么要求？

解：碰撞前纯滚动，质心速度：

$$v_0 = R\omega_0$$

圆木对A点的角动量：

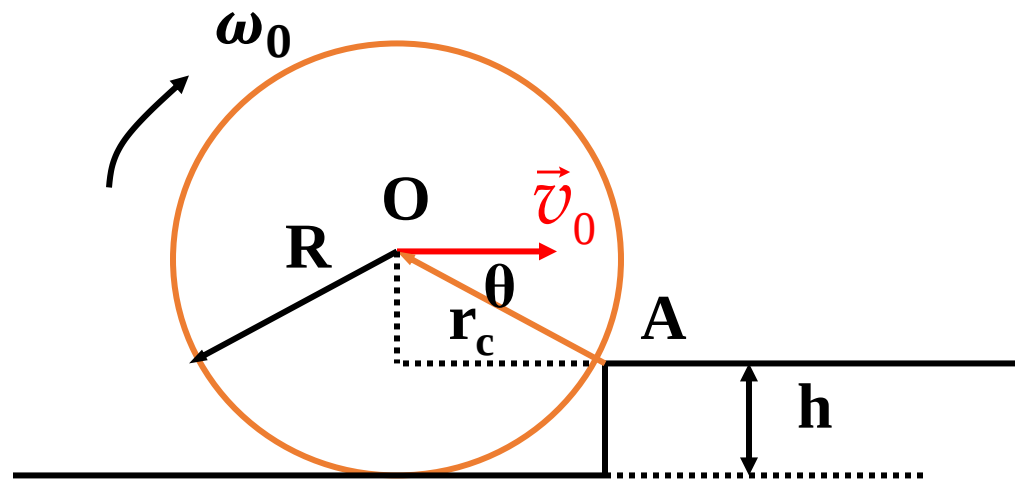
固有角动量： $J_c \omega_0$ $J_c = \frac{1}{2} mR^2$

轨道角动量： $\vec{r}_c \times m\vec{v}_0$

大小： $mv_0(R-h)$

碰撞后角动量： $J_A \omega$

转动惯量： $J_A = J_c + mR^2$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例46. 半径为 R 的圆木以角速度 ω_0 在水平地面上作纯滚动，在前进的路上撞在一高度为 h 的台阶并发生**完全非弹性碰撞**，即碰撞后圆木**不弹回**。圆木与台阶前缘之间的摩擦系数**足够大**，要原木能够翻上台阶而又不跳离台阶，对台阶的高度有什么要求？

碰撞前后角动量守恒

$$J_c \omega_0 + m v_0 (R - h) = (J_c + m R^2) \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{(3R - 2h)\omega_0}{3R}$$

如何分析？

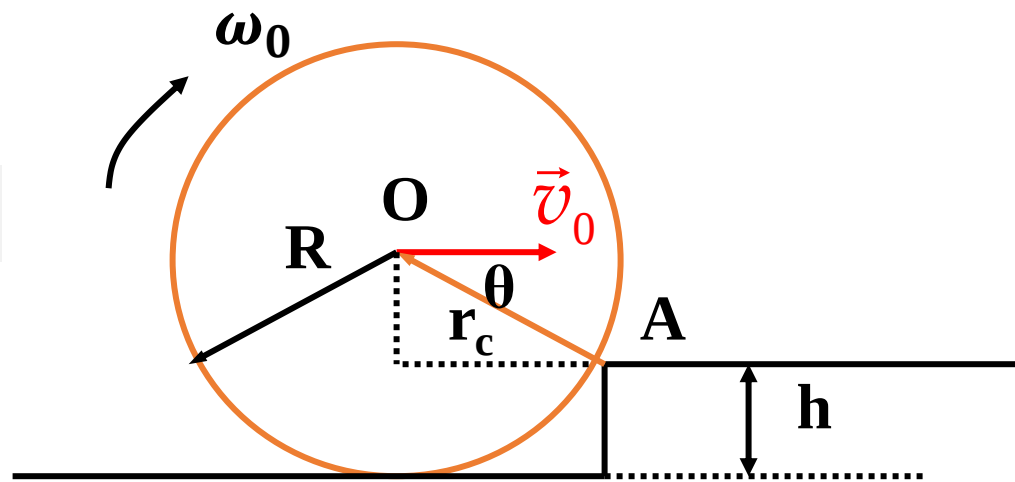
1) 爬上台阶的条件：碰撞后的动能足够大

$$\frac{1}{2} J_A \omega^2 > mgh \quad \Rightarrow \omega_0^2 > \frac{12hg}{(3R - 2h)^2}$$

2) 不跳离的条件：支持力 N 始终大于0

$$mg \sin \theta - N = mR\omega^2$$

$$\sin \theta = \frac{R - h}{R}$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例46. 半径为 R 的圆木以角速度 ω_0 在水平地面上作纯滚动，在前进的路上撞在一高度为 h 的台阶并发生**完全非弹性碰撞**，即碰撞后圆木**不弹回**。圆木与台阶前缘之间的摩擦系数**足够大**，要原木能够翻上台阶而又不跳离台阶，对台阶的高度有什么要求？

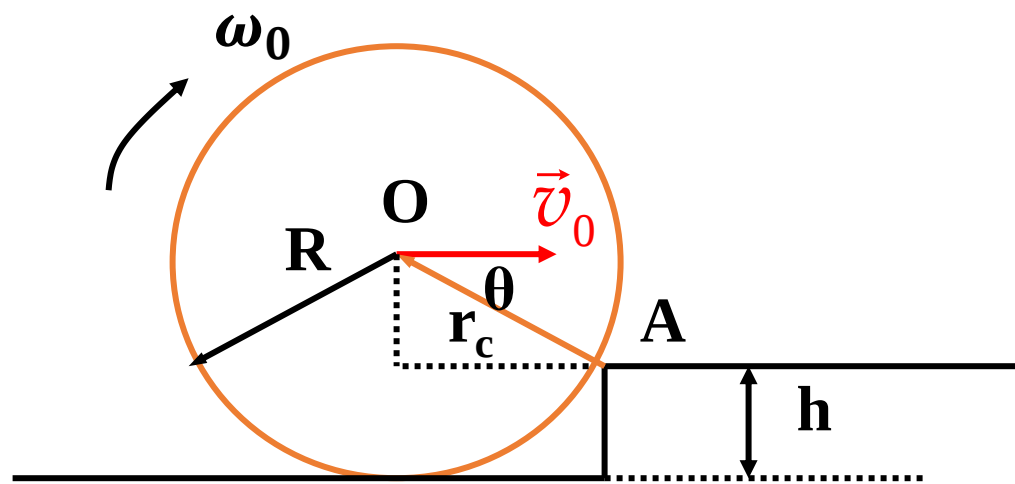
$$\begin{cases} mg \sin \theta - N = mR\omega^2 \\ \omega = \frac{(3R - 2h)\omega_0}{3R} \end{cases} \Rightarrow N = mg\left(1 - \frac{h}{R}\right) - mR\omega^2 > 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 < \frac{9(R-h)g}{(3R-2h)^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{12hg}{(3R-2h)^2} < \omega_0^2 < \frac{9(R-h)g}{(3R-2h)^2}$$

使两不等式均成立，即要求 $12h < 9(R-h)$

$$\Rightarrow h < 3R/7.$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例47. 质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘中心垂直于盘的固定光滑轴转动，绕过盘的边缘挂有质量为 m ，长为 l 的匀质柔软绳索。试求当圆盘两侧绳长之差为 S 时，绳的加速度的大小。

解：选坐标如图所示。

$$\rho = \frac{m}{l}$$

选长度为 x_1, x_2 的两段绳和绕着绳的盘为**研究对象**。

设 a 为绳的加速度， α 为盘的角速度， ρ 为绳的线密度，则在1, 2两点处绳中的张力分别为 T_1, T_2 ，则

$$a = r\alpha \quad \cdots (1)$$

$$x_2\rho g - T_2 = x_2\rho a \quad \cdots (2)$$

$$T_1 - x_1\rho g = x_1\rho a \quad \cdots (3)$$

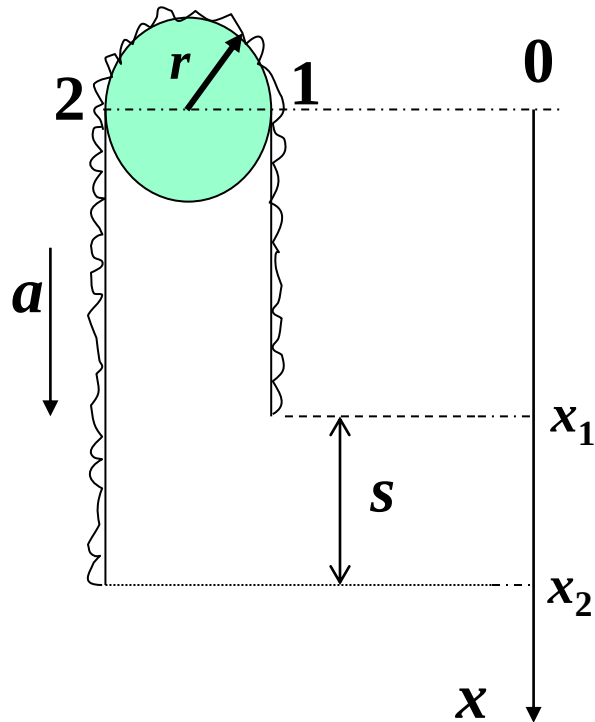
$$(T_2 - T_1)r = \left(\frac{1}{2}M + \pi r\rho\right)r^2\alpha \quad \cdots (4)$$

利用

$$l = \pi r + x_1 + x_2, \quad S = x_2 - x_1$$

解得

$$a = \frac{mgs}{(m + M/2)l}.$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例48. 难题解析——旋转的乒乓球

第四章 刚体的转动

可贵的
大学物理

问题引入

力对转轴的力矩

转动定律

典型例题

本节小结

■ 分析问题的指导思想

1. 明确 **研究对象**和**物理过程**

2. 明确讨论问题所相对的 **参考系**

3. 明确质点系角动量问题所选择的 **参考点/固定点**

4. 明确刚体定轴转动的 **转轴**

5. 分析物理过程对应的 **动量、能量和角动量变化与守恒问题**

8

- **破冰关键1：选择哪个参考点？**
- **破冰关键2：摩擦力的作用效果是什么？**

扶摇 2024/4/14 21:07:13

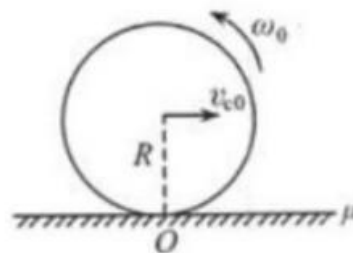
题目

如图所示，半径为 R 的乒乓球，绕质心轴的转动惯量

$$J = \frac{2}{3}mR^2, \text{ } m \text{ 为乒乓球的质量，以一定的}$$

初始条件在粗糙的水平面上运动，开始时球的质心速度为 v_{c0} ，初角速度为 ω_0 ，两者的方向如图。已

知乒乓球与地面间的摩擦因数为 μ ，试求乒乓球开始做纯滚动所需的时间及纯滚动时的质心速度。



* 老师，这道题我没理解答案说的角动量守恒，在完全滚动之前摩擦力不应该有力矩吗？有空请您帮我看下

ZKY 20:26:47

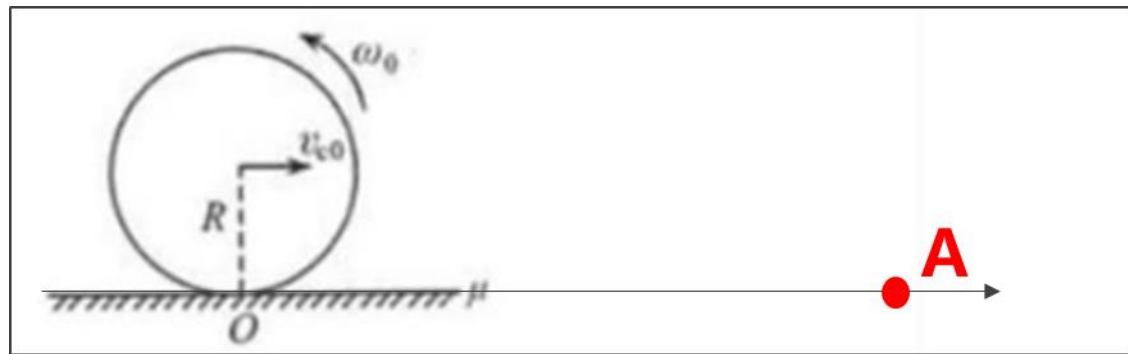
嗯，明天晚上我讲这个典型例题



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例48. 难题解析——旋转的乒乓球

(1) 以水平面上，右侧A点为参考点：



(2) 摩擦力通过A点，力矩为0，系统角动量守恒。

(3) 初始轨道角动量 $L_1 = Rm v_{c0}$ ，方向____？____

(4) 初始对质心的角动量 $L_2 = J \omega_0$ ，方向____？____

(5) 纯滚动时的角动量 ____？____，方向____？____。

(6) 摩擦力的作用效果是____？____

扶摇 2024/4/14 21:07:13

题目

如图所示，半径为R的乒乓球，绕质心轴的转动惯量

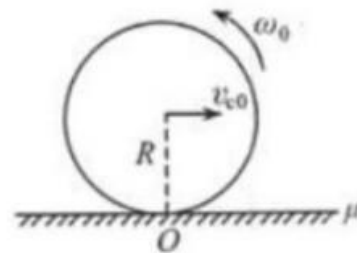
$$J = \frac{2}{3} m R^2, \quad m \text{ 为乒乓球的质量, 以一定的}$$

初始条件在粗糙的水平面上运动，开始时球的质心速

度为 v_{c0} ，初角速度为 ω_0 ，两者的方向如图。已

知乒乓球与地面间的摩擦因数为 μ ，试求乒乓球开始

做纯滚动所需的时间及纯滚动时的质心速度。



老师，这道题我没理解答案说的角动量守恒，在完全滚动之前摩擦力不应该有力矩吗？有空请您帮我看下

ZKY 20:26:47

嗯，明天晚上我讲这个典型例题



2. 典型例题 —— ① 力学部分

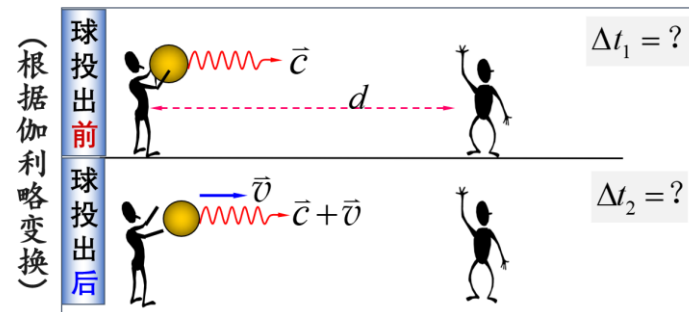
例49. 若 S 参考系中一个粒子以光速 c 沿 x 轴正向运动，求：在 S' 参考系观察该粒子的速度大小与方向？

解： 已知 $u_x = c, \quad u_y = u_z = 0$

根据洛伦兹速度变换

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2} c} = \frac{(c - v)c}{c - v} = c.$$

$$u'_y = 0 \quad u'_z = 0 \quad \Rightarrow u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} = c.$$



思考: 如何正确分析该假想实验?

光速不变



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例50. 若 S 参考系中一粒子以光速 c 运动沿 y 轴正向运动。求：在 S' 参考系观察该束光线的速度大小与方向？

解： 已知 $u_x = 0, \quad u_y = c, \quad u_z = 0.$

“光”是什么？

根据洛伦兹速度变换

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = -v. \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad u'_z = 0.$$

光速不变

$$\Rightarrow u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} = c.$$

思考1: 如何理解“光速不变原理”？

思考2: 有无可能“超光速”运动？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

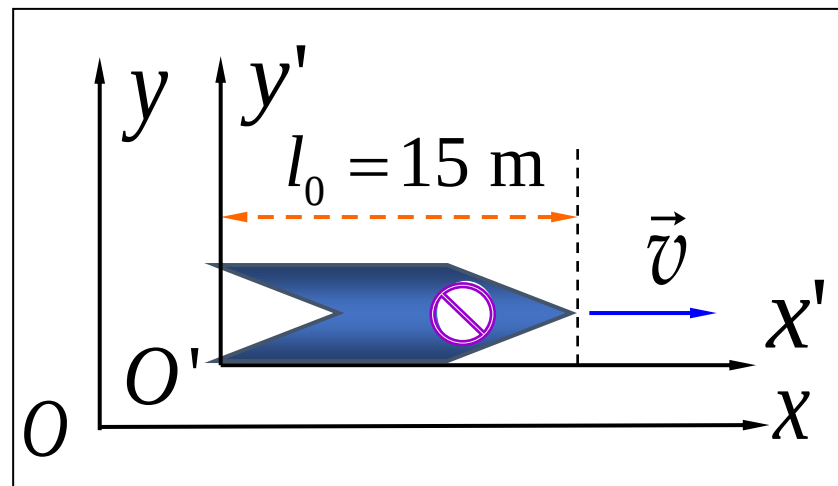
例51: 设想有一光子火箭，相对于地球以速率 $v = 0.95c$ 直线飞行，若以火箭为参考系测得火箭长度为 15 m，问以地球为参考系，此火箭有多长？

解：

固有长度 $l_0 = 15\text{m} = l'$

测量长度 $l = l' \sqrt{1 - \beta^2}$

$$l = 15 \sqrt{1 - 0.95^2} \text{ m} = 4.68 \text{ m}$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例52: 长为 1 m 的棒静止地放在 $x'o'y'$ 平面内，在 S' 系的观察者测得此棒与 x' 轴成 45° ，试问从 S 系的观察者来看此棒的长度以及棒与 Ox 轴的夹角是多少？设 S' 系相对 S 系速度 $v = \sqrt{3}c/2$ 。

解: $\theta' = 45^\circ$, $l' = 1\text{m}$. $\Rightarrow l'_x = l'_y = \sqrt{2}/2\text{m}$.

沿 x 方向 **长度收缩**

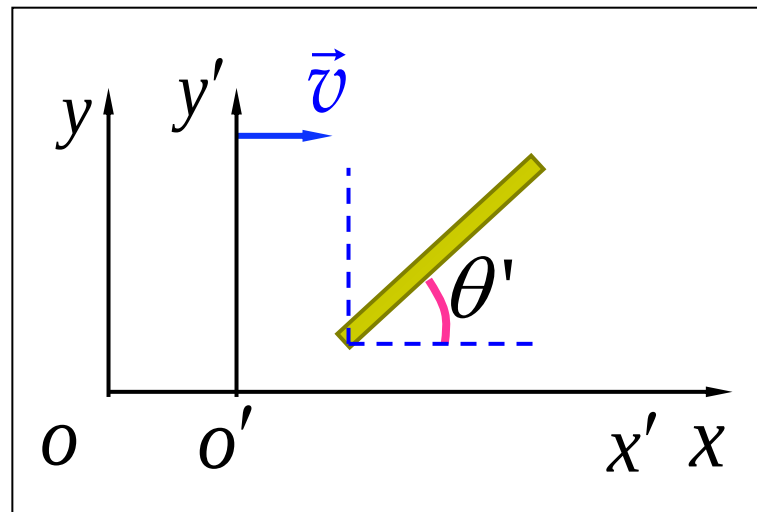
$$l_x = l'_x \sqrt{1 - v^2 / c^2} = \sqrt{2} / 4.$$

沿 y 方向 **长度不变**

$$l_y = l'_y = \sqrt{2} / 2 \text{ m}.$$

S 系观察总长: $l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = 0.79\text{m}.$

与 x 轴夹角: $\theta = \arctan \frac{l_y}{l_x} \approx 63.43^\circ.$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例53. 错题分析

14. 一艘原长为 $L_0 = 24 \text{ m}$ 的飞船相对于地面的速度为 $v = 0.5c$, 在地面上看到有一颗流星以相同的速率与飞船反向飞行。则在飞船上观测, 流星飞过飞船所用的时间为多少? (答: 10^{-7} s)

在地球上观测 $L' = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.5\sqrt{3} \times 24 = 12\sqrt{3} \text{ m}$

$$\Rightarrow t' = \frac{L'}{0.5c + 0.5c} = \frac{12\sqrt{3}}{c}$$

在飞船上观测

$$t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6 \times 10^{-8} \text{ s}$$

请问：他错在哪里？

地面观测流星速度：

$$v_2 = -0.5c$$

飞船观测流星速度：

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{v_2 - v}{1 - vv_2 / c^2} \\ &= \frac{-0.5c - 0.5c}{1 + 0.25} = -0.8c \end{aligned}$$

流星飞过飞船的时间：

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \frac{L_0}{v'_2} = \frac{24 \text{ m}}{0.8c} \\ &= \frac{24 \text{ m}}{2.4 \times 10^8 \text{ m/s}} = 10^{-7} \text{ s} \end{aligned}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例54. 错题分析

似乎题目出错了：是火箭？是飞船？还是导弹？

11. 一艘飞船以 $v = 0.8c$ 的速率飞离地球，在飞船起飞 20 s 后（飞船上的钟），该飞船向地球发射一枚导弹，其相对于地球的速率为 $v_1 = 0.4c$ ，问火箭发射多长时间之后（地球上的钟），导弹击中地球？（答：100 s）

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = 0.6$$

请问：他错在哪里？

则在飞船看来：起飞 20s，走过 $20 \times 0.8c = 1.6c$ 路程

则在地球看来，这段距离为： $\Delta x = \Delta x' \gamma = 1.6c \times 0.6 = 0.96c$

则导弹击中地球需 $\frac{\Delta x}{v_1} = \frac{0.96c}{0.4c} = 2.4s$

而飞船飞行 20s，在地球看来，飞行 $\frac{20}{\gamma} = \frac{100}{3}s$

则总时间为 $2.4 + \frac{100}{3} = \frac{172}{3}s$ 。（地球时钟）

飞船参考系（固有时间）：

$$\Delta t' = 20s$$

地面参考系：

$$\Delta t = \Delta t' / \gamma = \frac{20}{0.6} = \frac{100}{3}s$$

导弹发射时距离地球：

$$\Delta s = v \Delta t$$

飞船起飞后多久导弹击中地球？

$$\Delta t + \Delta t_1 = \Delta t + \frac{\Delta s}{v_1} = 3\Delta t$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例55. 相对论质量问题

简单推导如下：

$$S \text{系: } mv = Mu_x = (m_0 + m)u_x$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{mv}{m_0 + m}$$

$$S' \text{系: } -mv = (m_0 + m)u'_x$$

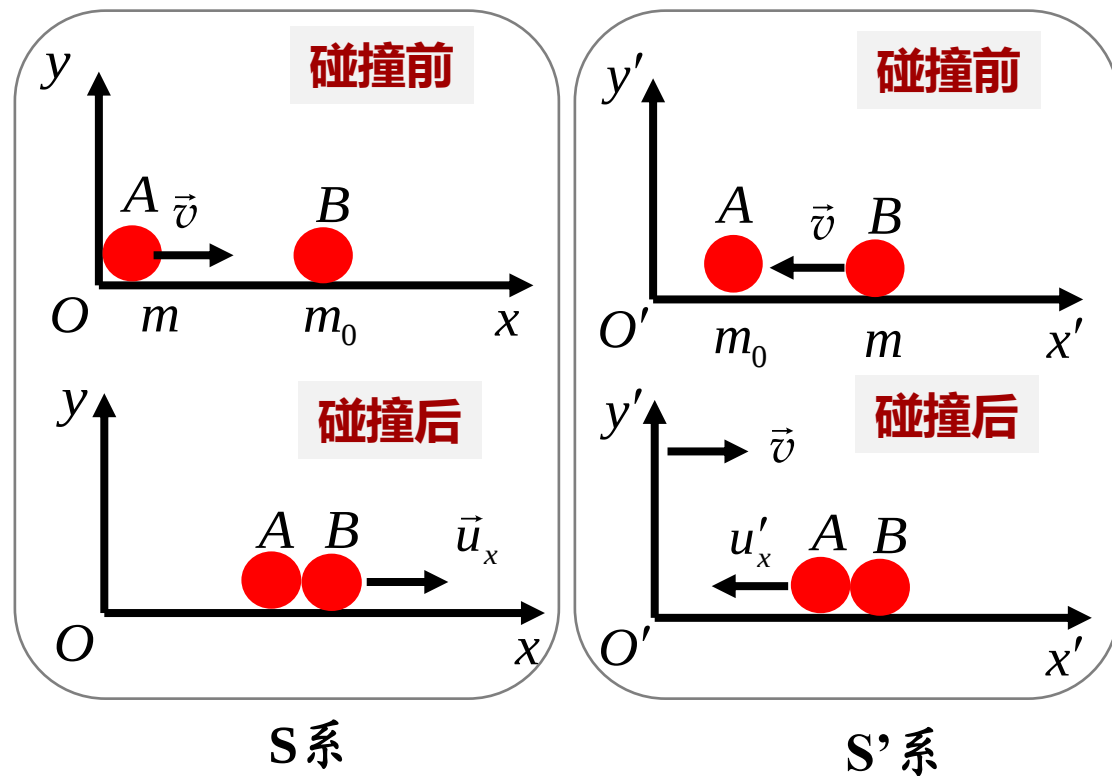
$$\Rightarrow u'_x = \frac{-mv}{m_0 + m} = -u_x$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x / c^2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

二者之间的关系……

构建物理图像



(相对论质量)



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例55. 相对论质量问题

$$S \text{系: } mv = Mu_x = (m_0 + m)u_x \Rightarrow u_x = \frac{mv}{m_0 + m}$$

$$S' \text{系: } -mv = (m_0 + m)u'_x \Rightarrow u'_x = \frac{-mv}{m_0 + m} = -u_x$$

洛伦兹变换:

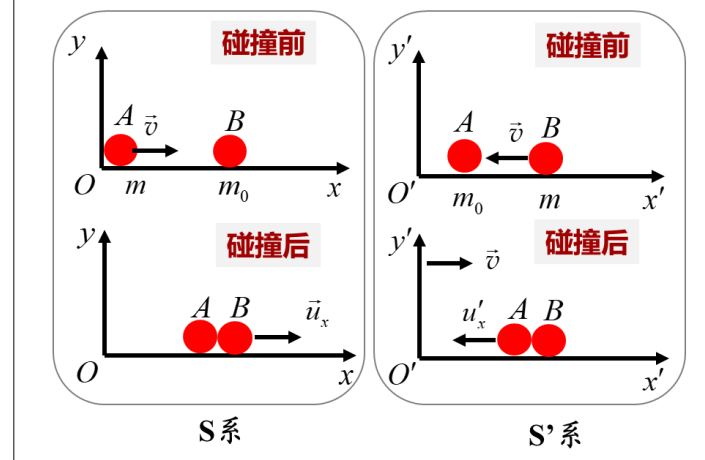
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x / c^2} = -u_x$$

$$\frac{u_x}{v} = \frac{m}{m_0 + m}$$

$$\rightarrow -\frac{u_x - v}{u_x} = 1 - \frac{vu_x}{c^2} \rightarrow \frac{v}{u_x} - 1 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{u_x}{v} \rightarrow \frac{m_0}{m} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{m}{m_0 + m} \right)$$

$$\rightarrow \frac{m - m_0}{m} = \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{m}{m_0 + m} \right) \rightarrow \frac{m^2 - m_0^2}{m^2} = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow 1 - \frac{m_0^2}{m^2} = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

构建物理图像



得证。



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例55. 相对论动能问题

$$dE_k = \vec{F}_{\text{合}} \cdot d\vec{r}$$

$$\rightarrow dE_k = d\vec{p} \cdot \vec{v} = \frac{1}{m} d\vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2m} dp^2$$

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

$$\rightarrow 1 - v^2 / c^2 = m_0^2 / m^2 \quad \rightarrow v^2 = c^2 (1 - m_0^2 / m^2)$$

$$\rightarrow p^2 = m^2 v^2 = m^2 c^2 (1 - m_0^2 / m^2)$$

$$\rightarrow p^2 = m^2 v^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$$

$$\rightarrow dp^2 = d(m^2 c^2 - m_0^2 c^2)$$

$$\vec{F}_{\text{合}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Handwritten derivation on a piece of paper with "SWEET MEMORIES" written on it:

$$dW = \vec{F}_{\text{合}} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{v} = d\vec{p} \cdot \frac{\vec{p}}{m}$$

$$= \frac{1}{2m} (dp^2)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow v^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \right]$$

$$p^2 = m^2 v^2 = m^2 c^2 \left[1 - \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \right] = c^2 [m^2 - m_0^2]$$

$$dp^2 = 2mc^2 dm$$

$$dW = \frac{1}{2m} \cdot 2mc^2 dm = c^2 dm$$

$$\rightarrow dE_k = c^2 dm$$

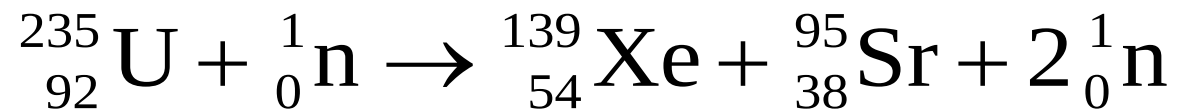
$$\rightarrow E_k(v) - E_k(0) = c^2 (m - m_0)$$

$$\rightarrow E_k = mc^2 - m_0 c^2.$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例56. 核裂变中的质量亏损



原子质量单位

$$1\text{u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\Delta m = 0.22\text{u} \quad \text{释放能量:} \quad Q = \Delta E = \Delta m \cdot c^2 \approx 200 \text{ MeV}$$

$$1\text{g} \text{ 铀-235 的原子核裂变释放的能量: } Q = 8.42 \times 10^{10} \text{ J.}$$

每公斤 TNT 可产生
 $4.2 \times 10^6 \text{ J}$ 的能量.

例57. 核聚变中的质量亏损



$$\Delta m = 0.035\text{u} = 5.835 \times 10^{-29} \text{ kg.}$$

$$Q = \Delta E = (\Delta m)c^2 = 2.47 \times 10^{-12} \text{ J} = 3.27\text{MeV.}$$

轻核聚变 **条件**: 温度达到
 10^8 K 时, 使 ${}_1^2\text{H}$ 具有的
动能, 足以克服两 ${}_1^2\text{H}$ 之间的
库仑排斥力.



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例58. 两个全同粒子静止质量 m_0 ，以速率 v 相向而行，两粒子作完全非弹性碰撞后，变成一个静止的复合粒子，求其静止质量 M_0 。

解： 两粒子在碰前后**能量守恒**：

$$M_0 = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} > 2m_0$$

两粒子在碰撞过程中，静止质量不守恒，**静止质量的增量**为：

$$\Delta m = M_0 - 2m_0 \quad (\text{质量过剩})$$

实际上，碰前两粒子动能转化为碰后静止复合粒子的**总能**，即：

$$-\Delta E_k = \Delta m \cdot c^2.$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例59. 设一质子以速度 $v = 0.80c$ 运动. 求其总能量、动能和动量.

解: 质子的**静止质量**: $E_0 = m_0 c^2 = 938 \text{ MeV}.$

总能量:
$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1563 \text{ MeV}.$$

动能:
$$E_k = E - m_0 c^2 = 625 \text{ MeV}.$$

动量:
$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$= 6.68 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例60. 静止质量为 m_1 的小球以相对于地面的速度 v_1 与静止质量为 m_2 的静止小球发生正碰，碰撞后两个小球合二为一。求：碰撞后的速度 $V=$ _____，合成的小球静止质量为 $M_0=$ _____，相对论质量 $M=$ _____。

问题1：该碰撞过程，系统**相对论动量**是否守恒？

问题2：该碰撞过程，系统**相对论质量**是否守恒？

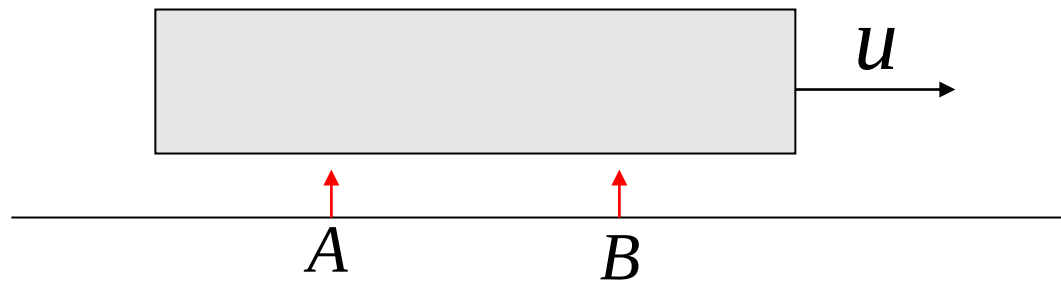
问题3：该碰撞过程，系统**相对论动能**是否守恒？

问题4：该碰撞过程，系统**静止质量**是否守恒？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例61. 列车以速度 u 相对于地面运动，地面上相距为 l 的A, B两个人同时向列车射击，子弹**瞬间击中**列车后在列车上留下弹痕。求两弹痕之间距离 $A'B' =$ _____



问题1：该题设条件中“**瞬间击中**”如何理解？

问题2：如何理解题目中“**同时性的相对性**”问题？

问题3：题目中是否进行了“**长度的测量**”？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

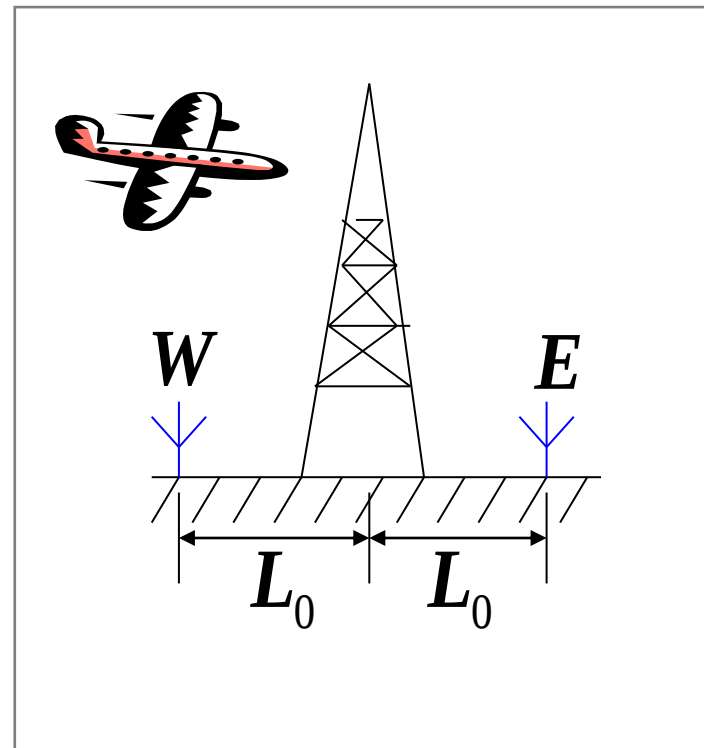
例62. 一发射台向东西两侧距离均为 L_0 的两个接收站E与W发射讯号, 如图, 今有一飞机以匀速度 v 沿发射台与两接收站的连线由西向东。
求: 在飞机上测得两接收站收到发射台同一讯号的**时间间隔**是多少?

问题1: 信号从哪里**发出**? 到哪里**接收**?

问题2: 是要在哪个**参考系**测量?

问题3: 涉及了哪两个相对论**事件**?

问题4: 求得是什么样的**时间间隔**?





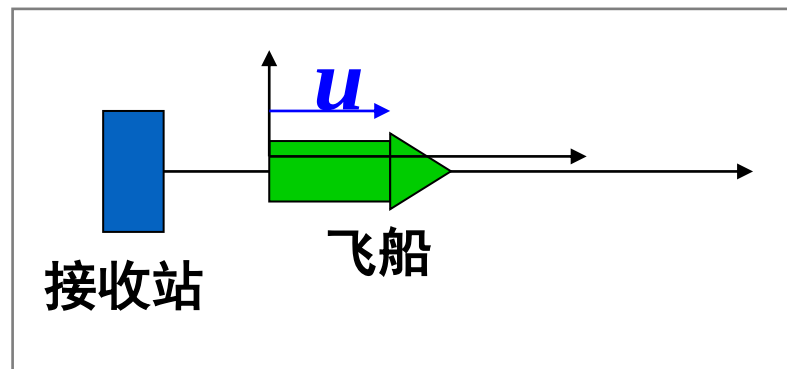
2. 典型例题 —— ① 力学部分

例63. 飞船以 $u = 0.6c$ 沿地面接收站与飞船连线方向向外飞行，飞船上的光源以 $T_0 = 4s$ 的周期向地球发**光脉冲**。求：地面接收站接收到的**脉冲周期**。

问题1：几个参考系？有何关系？

问题2：如何正确理解题设条件中，信号**发射的周期**？哪里发射的？

问题3：如何正确理解题设条件中，信号**接收到的周期**？哪里接收的？





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例63. 飞船以 $u = 0.6c$ 沿地面接收站与飞船连线方向向外飞行，飞船上的光源以 $T_0 = 4s$ 的周期向地球发**光脉冲**。求：地面接收站接收到的**脉冲周期**。

解： 直接由洛仑兹变换

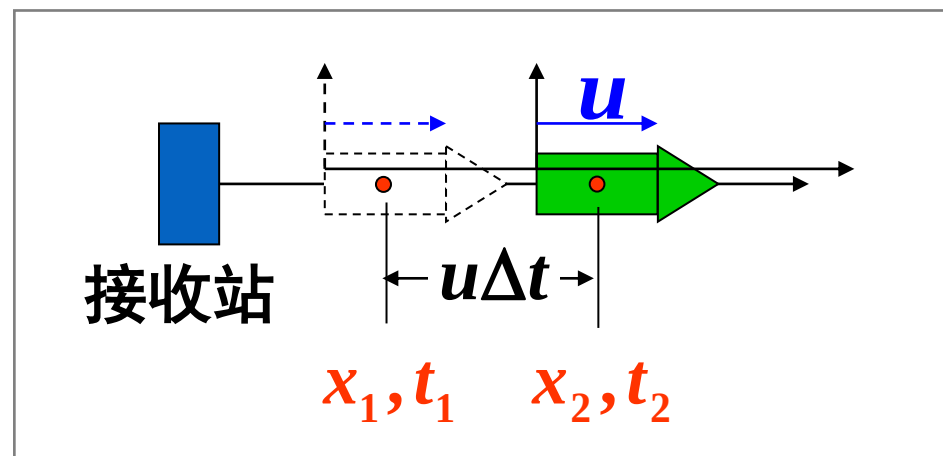
飞船相继**两次发出脉冲（两事件）**的时间差

$$\Delta t = \gamma(\cancel{\Delta t'} + \frac{u}{c^2} \Delta x') = \gamma T_0. \quad (\text{时间膨胀})$$

飞船相继两次发出脉冲的空间距离： $\Delta x = u\Delta t$.

地面接收站所测量的周期：

$$T = \Delta t + \frac{\Delta x}{c} = \Delta t + \frac{u}{c} \Delta t = \left(1 + \frac{u}{c}\right) \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\sqrt{c-u}}{\sqrt{c+u}} T_0 = 8 \text{ s}.$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

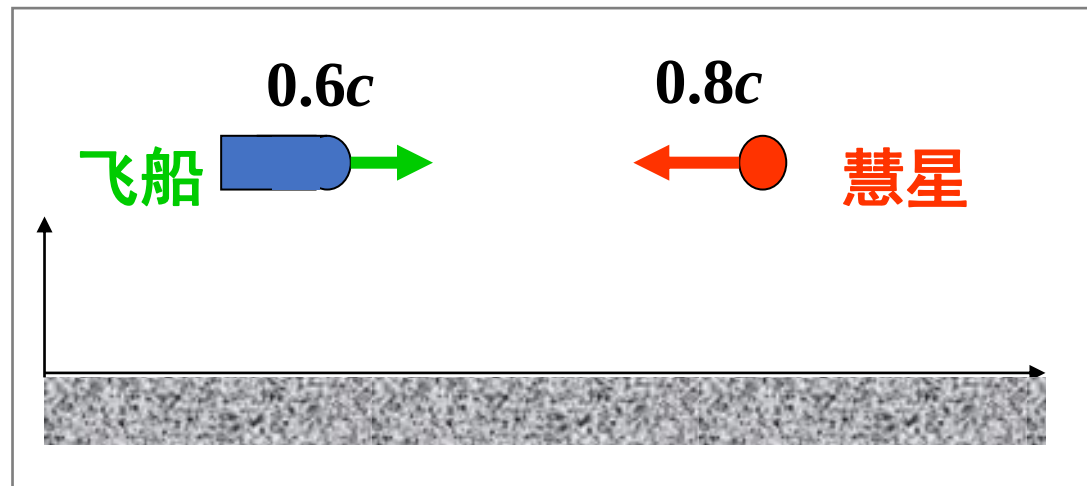
例64. 设想地球上有一观察者测得一艘宇宙以 $0.6c$ 的速率向东飞行， $5.0s$ 后该飞船将和一颗以 $0.8c$ 的速率向西飞行的彗星相碰撞。试问：（1）飞船上看，彗星的速度多大？（2）飞船上看，再经过多少时间相撞？

问题1：几个参考系？

问题2：难点在哪里？

问题3：地面看在哪里相撞？

问题4：如何切换到飞船视角（参考系）？





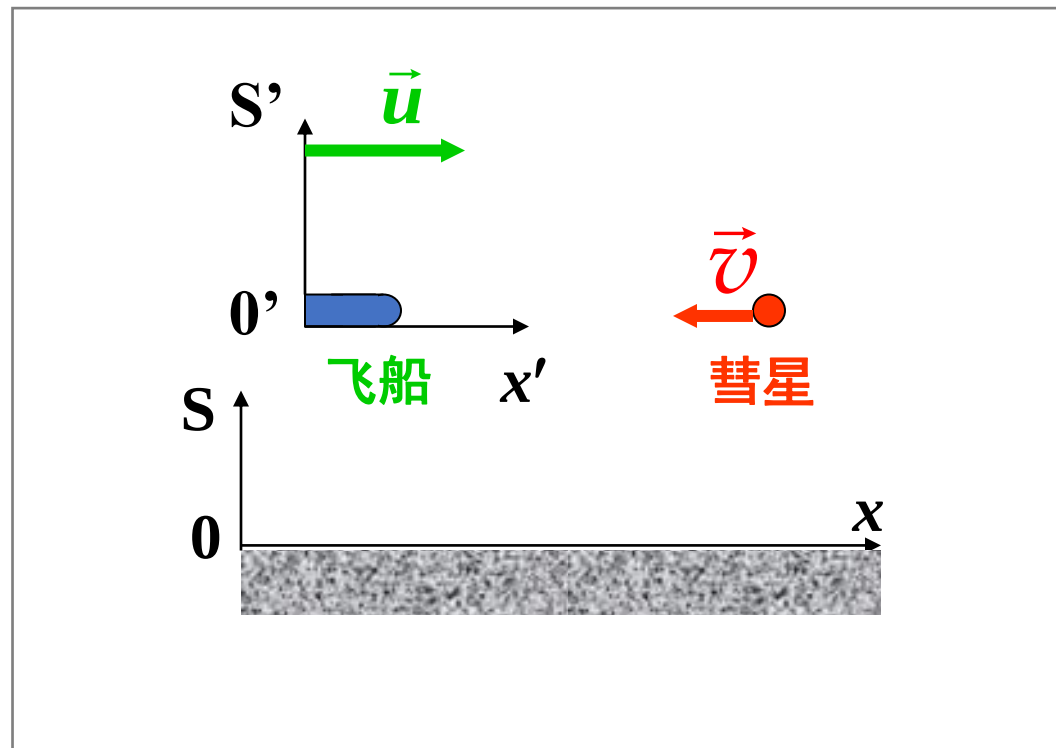
2. 典型例题 —— ① 力学部分

例64. 设想地球上有一观察者测得一艘宇宙以 $0.6c$ 的速率向东飞行， $5.0s$ 后该飞船将和一颗以 $0.8c$ 的速率向西飞行的彗星相碰撞。试问：（1）飞船上看，彗星的速度多大？（2）飞船上看，再经过多少时间相撞？

解(1): 由洛伦兹速度变换

$$\begin{aligned}v' &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \\&= \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + \frac{0.6c}{c^2} \times 0.8c} = -0.946c.\end{aligned}$$

(彗星相对于地面的速度)



注：本页略去了相关符号定义.



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例64. 设想地球上有一观察者测得一艘宇宙以 $0.6c$ 的速率向东飞行, $5.0s$ 后该飞船将和一颗以 $0.8c$ 的速率向西飞行的彗星相碰撞。试问: (1) 飞船上看, 彗星的速度多大? (2) 飞船上看, 再经过多少时间相撞?

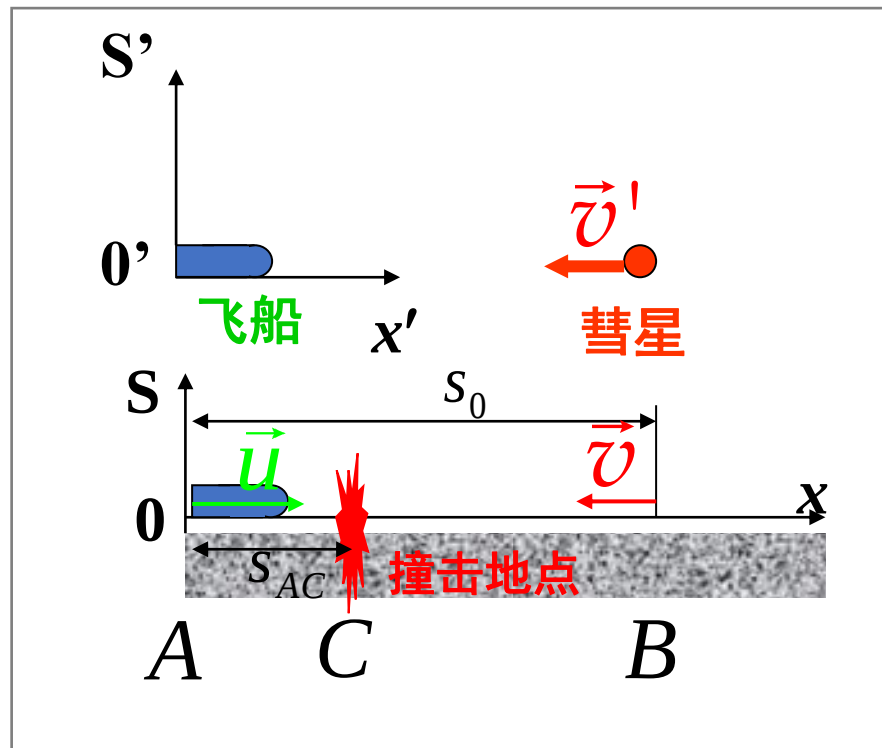
解(2): 方法一 (长度收缩)

地面观察: $s_{AC} = u\Delta t = 3c.$

飞机观察, 地面的长度收缩:

$$s'_{AC} = s_{AC} \sqrt{1 - u^2 / c^2} = 3c \times 0.8 = 2.4c.$$

飞机观察历时: $\Delta t' = s'_{AC} / u = 4 \text{ s}.$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例64. 设想地球上有一观察者测得一艘宇宙以 $0.6c$ 的速率向东飞行, 5.0s 后该飞船将和一颗以 $0.8c$ 的速率向西飞行的彗星相碰撞。试问: (1) 飞船上看, 彗星的速度多大? (2) 飞船上看, 再经过多少时间相撞?

解(2): 方法二 (时间膨胀)

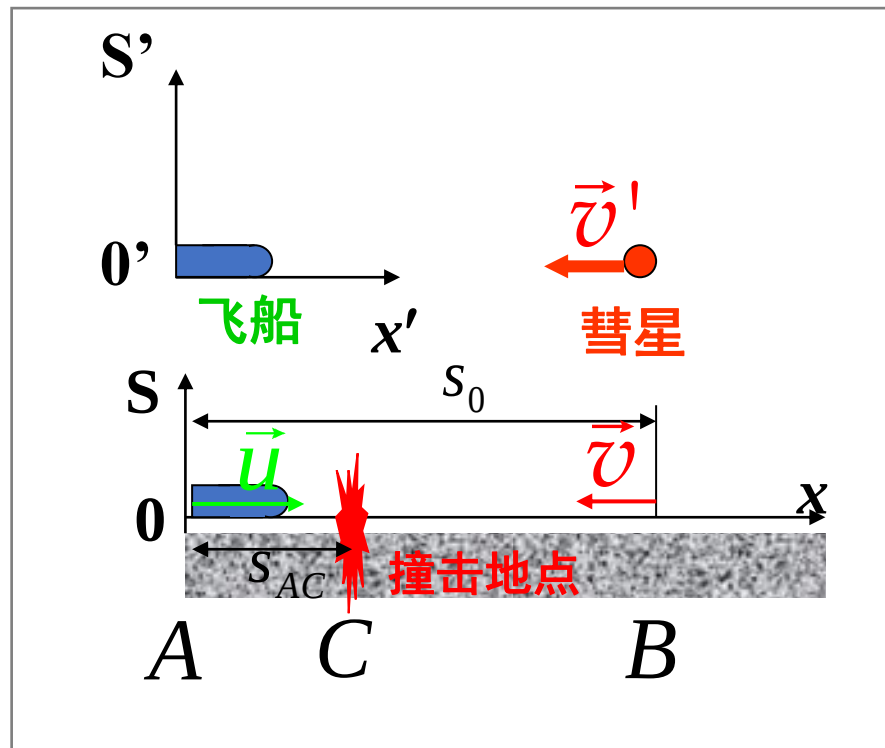
飞机观察, 固有时间 τ_0 :

发现→碰撞 (同一地点)

地面观察, 时间膨胀:

$$\Delta t = \tau_0 / \sqrt{1 - u^2 / c^2} = 5 \text{ s.}$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \Delta t \sqrt{1 - u^2 / c^2} = 4 \text{ s.}$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

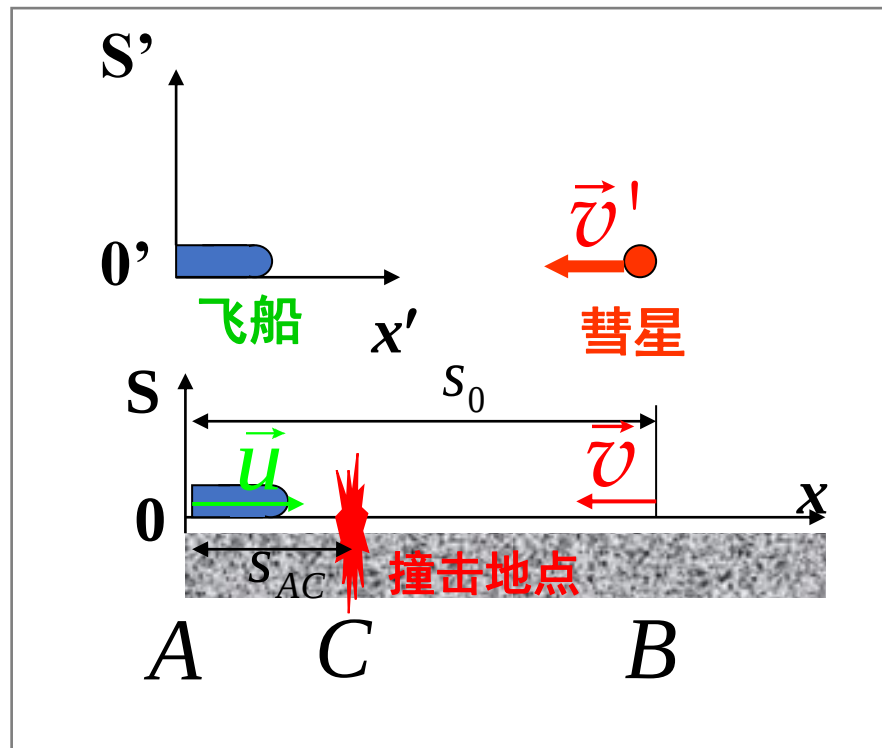
例64. 设想地球上有一观察者测得一艘宇宙以 $0.6c$ 的速率向东飞行, $5.0s$ 后该飞船将和一颗以 $0.8c$ 的速率向西飞行的彗星相碰撞。试问: (1) 飞船上看, 彗星的速度多大? (2) 飞船上看, 再经过多少时间相撞?

解(2): 方法三 (洛伦兹变换)

事件A: 飞船被发现 $(x_1, t_1), (x'_1, t'_1)$

事件B: 飞船碰撞 $(x_2, t_2), (x'_2, t'_2)$

$$\begin{aligned} \Delta t &= 5 \text{ s.} \\ \Delta x &= u \Delta t. \end{aligned} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = 4 \text{ s.}$$





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例65. 设想在参照系S中，有两个静止质量都是 m_0 的粒子A、B分别以速度 u 相向运动，两者碰撞后合在一起成为一个静止质量为 M_0 的粒子，求 $M_0=?$ 有一种解答如下： $M_0 = m_0 + m_0 = 2m_0$. 这个解答对否？为什么？

例66. 上题中若质点A静止，质点B以 $6m_0c^2$ 的动能向A运动，碰撞后合成一粒子，若无能量释放，求合成粒子的静止质量。

$$E = Mc^2 = m_0c^2 + m_0c^2 + 6m_0c^2 = 8m_0c^2.$$

$$\Rightarrow M_0 = 8m_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

板书推导：

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\Rightarrow M_0 = 4m_0.$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例67. 一个固有长度为 l_0 的车厢，以速度 u 相对地面作匀速直线平动，在车厢中后壁放出一个小球，小球以相对车厢的速度 u_0 沿车厢长度方向匀速向前壁运动，求地面观察者测得小球从车厢后壁运动到前壁所经历的时间。

解： $t'_2 - t'_1 = \frac{l_0}{u_0}, \quad x'_2 - x'_1 = l_0.$

应用洛伦兹变换：

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{u}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\frac{l_0}{u_0} + \frac{u}{c^2}l_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\frac{l_0}{u_0} \left(1 + \frac{uu_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

小结1：你学会了吗？

小结2：你会用其他方法求解改题目吗？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例68. 一艘装有无线电发射和接收装置的飞船以 $0.6c$ 的速度飞离地球，宇航员向地球发射了一个无线电信号， 20 s (飞船时间)接收到返回的信号。请问：(1) 当信号被地球反射时，从飞船上测量地球距离飞船多远？(2) 当飞船接收到反射信号时，从地球上测量，飞船飞离地球多远？

解： 飞船测量，信号被反射时的时间是：_____.

飞船测量，地球与飞船距离是：_____.

飞船测量，飞船发出到接收信号的过程经历时间：_____.

该过程是：_____ (固有时间/测量时间？)

地球测量该过程经历的时间是：_____.

地球测量飞船飞离地球的距离是：_____.



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例68. 一艘装有无线电发射和接收装置的飞船以 $0.6c$ 的速度飞离地球，宇航员向地球发射了一个无线电信号， 20 s (飞船时间)接收到返回的信号。请问：(1) 当信号被地球反射时，从飞船上测量地球距离飞船多远？(2) 当飞船接收到反射信号时，从地球上测量，飞船飞离地球多远？

解： 飞船测量，信号被反射时的时间是： 10 s .

飞船测量，地球与飞船距离是： $10c$.

飞船测量，飞船发出到接收信号的过程经历时间： 20 s .

该过程是：**固有时间**.

地球测量该过程经历的时间是： 25 s .

$$0.5 \times (c + 0.6c) \times 25\text{s} = 20c.$$

地球测量飞船飞离地球的距离是： $20c$.



2. 典型例题 —— ① 力学部分

$$u = 0.6c, \Delta t' = 20s$$

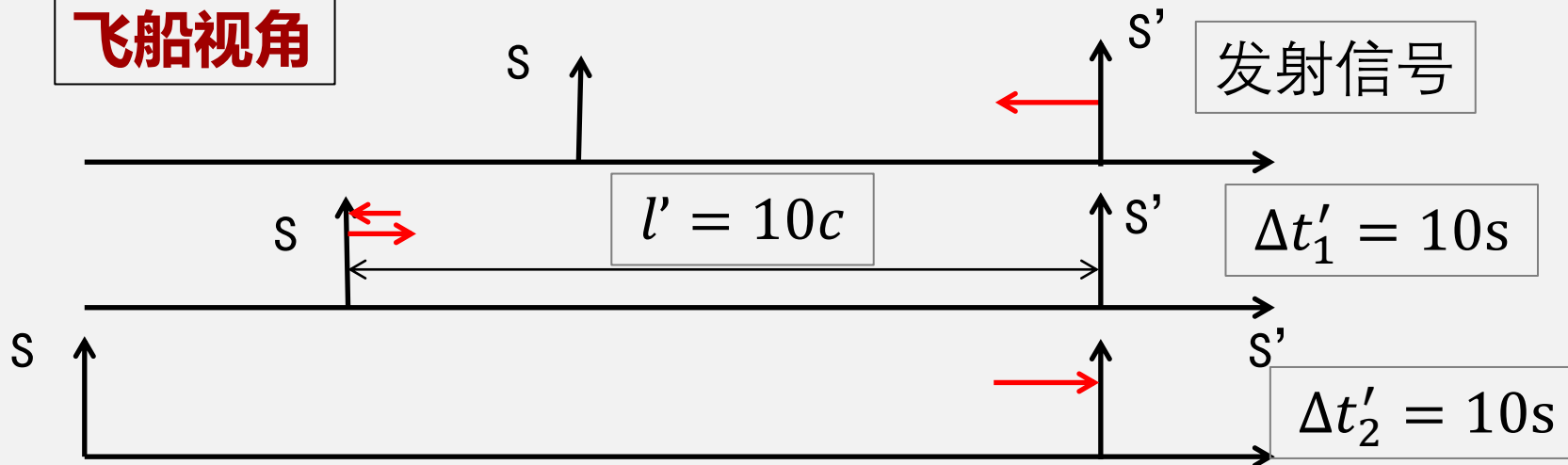
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 25s$$

这是否是初中数学

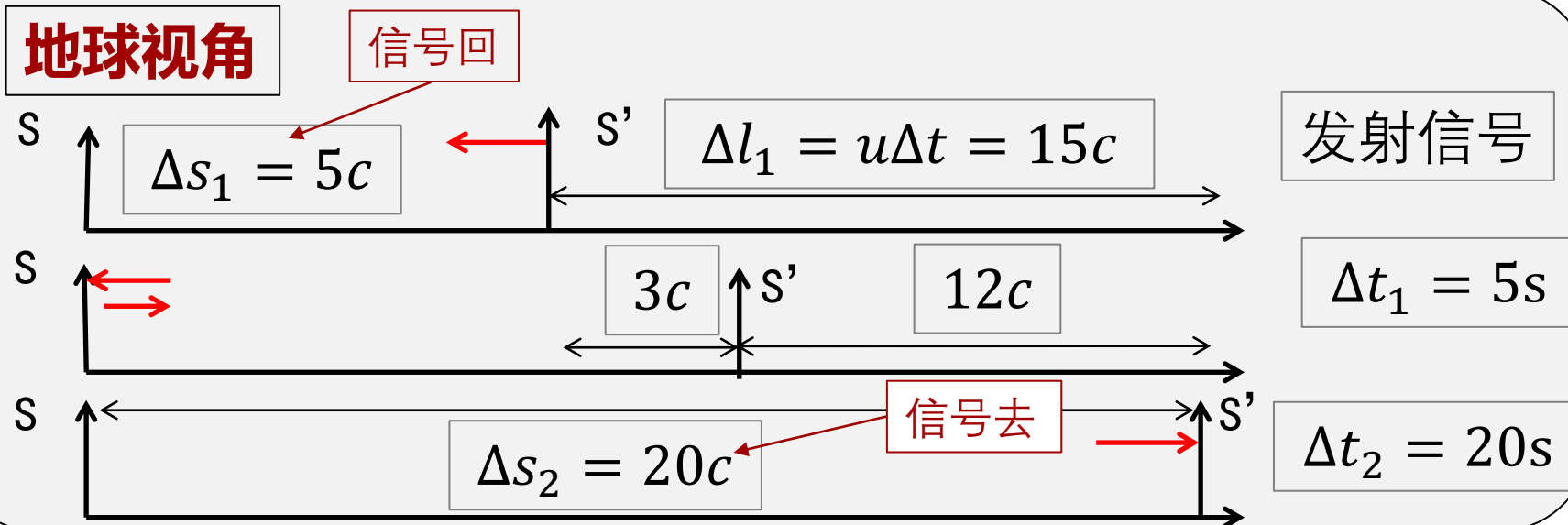
“追击问题”

???

飞船视角



地球视角





2. 典型例题 —— ① 力学部分

例69. 静止的 π 介子平均寿命为 $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$, 在高能加速器中 π 介子获得了 $0.75c$ 的速度, 实验测得 π 介子衰变前通过的距离是 $L = 8.5 \pm 0.6 \text{ m}$. 而不是 $L = 0.75c \times 2.6 \times 10^{-8} \text{ s} = 5.85 \text{ m}$. 你认为是什么原因?

解: 高速运动的粒子, 发生时间膨胀效应。

地面参考系看, 其寿命增加:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = 3.9 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

$$L = 0.75c \times 3.9 \times 10^{-8} \text{ s} = 8.8 \text{ m}.$$

(与实验相符)



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例70. 在**S**系中的**x**轴上相隔为 Δx 处有两只同步的钟**A**和**B**，读数相同。在**S'**系的**x**轴上也有一只同样的钟**A'**。设**S'**系相对于**S**系的运动速度为**V**，沿**x**轴方向。且当**A'**与**A**相遇时，刚好两钟的读数均为零。那么当**A'**钟与**B**钟相遇时，在**S**系中**B**钟的读数是_____，此时**S'**系中**A'**钟的读数是_____。

作法1:

$$\text{A'系下 } \Delta x' = 0$$

有

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

同一个题目，三个方法，三个答案。请问：哪个方法正确？

$$\Delta t \sqrt{1-v^2/c^2} = \Delta t'$$

其他两种方法错在哪里？

$$\Delta t' = \sqrt{1-v^2/c^2} \frac{\Delta x}{v}$$



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例70. 在S系中的x轴上相隔为 Δx 处有两只同步的钟A和B，读数相同。在S'系的x轴上也有一只同样的钟A'。设S'系相对于S系的运动速度为V，沿x轴方向。且当A'与A相遇时，刚好两钟的读数均为零。那么当A'钟与B钟相遇时，在S系中B钟的读数是_____，此时S'系中A'钟的读数是_____。

作法2

事件1: AA'重合: $t=0, x=0$

事件2: A'B重合: $t=\frac{\Delta x}{V}, x=\Delta x$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\Delta x V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\Delta x}{V} - \frac{\Delta x V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

讨论：该方法和上一页的方法结果相同吗？为什么？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例70. 在S系中的x轴上相隔为 Δx 处有两只同步的钟A和B，读数相同。在S'系的x轴上也有一只同样的钟A'。设S'系相对于S系的运动速度为V，沿x轴方向。且当A'与A相遇时，刚好两钟的读数均为零。那么当A'钟与B钟相遇时，在S系中B钟的读数是_____，此时S'系中A'钟的读数是_____。

作法3 事件1: A处钟表指向0, $t=0$ $x=0$
事件2: A处钟表指向 $\frac{\Delta x}{V}$ $t=\frac{\Delta x}{V}$ $x=0$.

$$\Delta t' = \frac{\frac{\Delta x}{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

讨论：事件2（A处钟表指向读数 $\Delta x/v$ ）和事件3（B处钟表指向读数 $\Delta x/v$ ）是什么关系？



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例71. 宇航员以 $v = 0.80c$ 的速度驾驶飞船驶向距地球8光年的星体，求地面和宇航员测得到达星体的时间。

解： S 系（地面）中地球和星体坐标分别为 $x_1 = 0$ $x_2 = 8\text{光年}$

S 系（地面）**测量**宇航员到达星体的时间 $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{v} = 10\text{年}$

宇航员**测量**地球和星体的距离 $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 4.8\text{光年}$

宇航员**测量**得到达星体的时间

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 6\text{年}$$



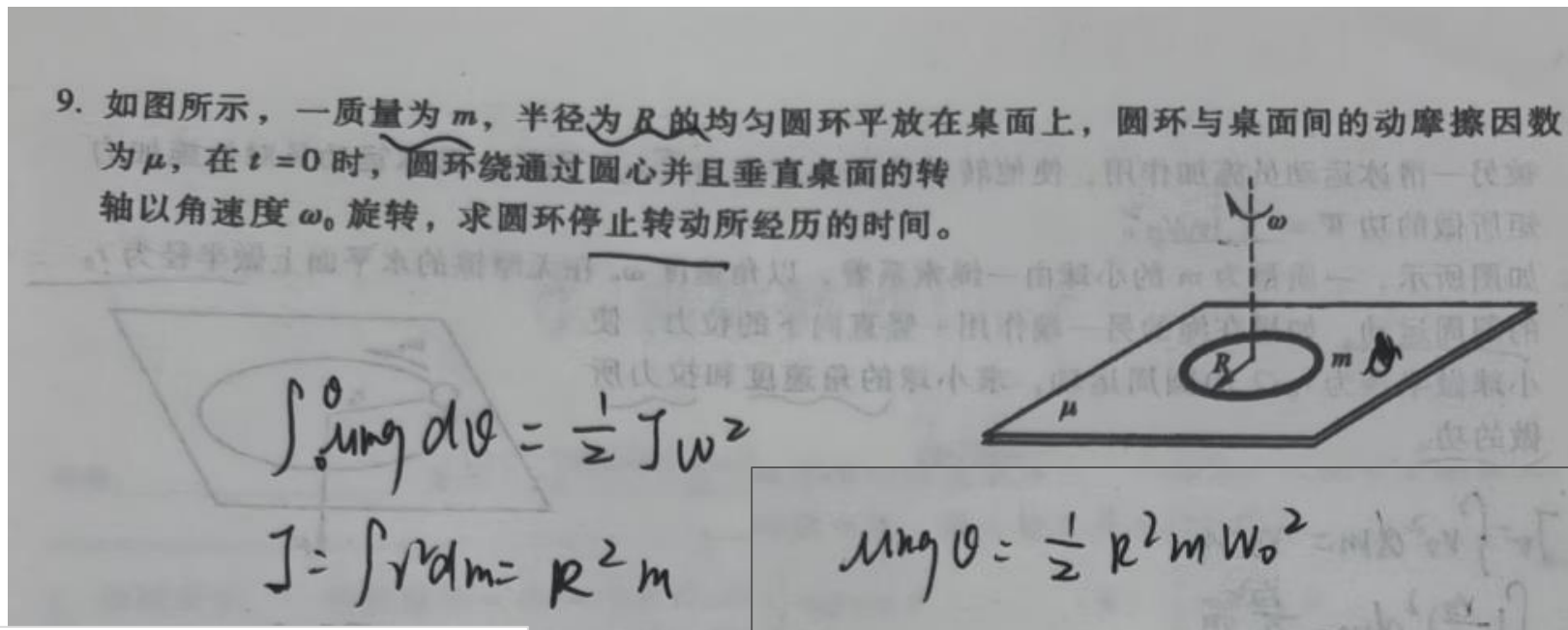
2. 典型例题 —— ① 力学部分

例72. 线上答疑题目

请判断，这名同学错在哪里？

(2025. 04. 07)

9. 如图所示，一质量为 m ，半径为 R 的均匀圆环平放在桌面上，圆环与桌面间的动摩擦因数为 μ ，在 $t=0$ 时，圆环绕通过圆心并且垂直桌面的转轴以角速度 ω_0 旋转，求圆环停止转动所经历的时间。



$$\int_0^{\theta} \mu mg d\theta = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \int r^2 dm = R^2 m$$

$$\mu mg \theta = \frac{1}{2} R^2 m \omega_0^2$$

$$\theta = \frac{R^2 \omega_0^2}{2 \mu g}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\int_0^{\theta} \omega d\theta = \int_0^t \omega dt \Rightarrow t = \frac{R^2 \omega_0}{2 \mu g}$$

24L0203 2025/4/7 20:06:20

老师这个先用动能定理求转过的角度，再求时间，怎么结果不对呢？

ZKY 2025/4/7 20:18:37

你的物理原理用错了吧，都用了什么原理

24L0203 2025/4/7 20:21:33

先用摩擦力做功等于动能变换量。然后用角速度等于角度变化量除以时间

24L0203 2025/4/7 20:23:38

第二步角速度这个是不是不能这么用啊



2. 典型例题 —— ① 力学部分

例73. 线上答疑题目

YACccc 2025/4/8 20:50:43

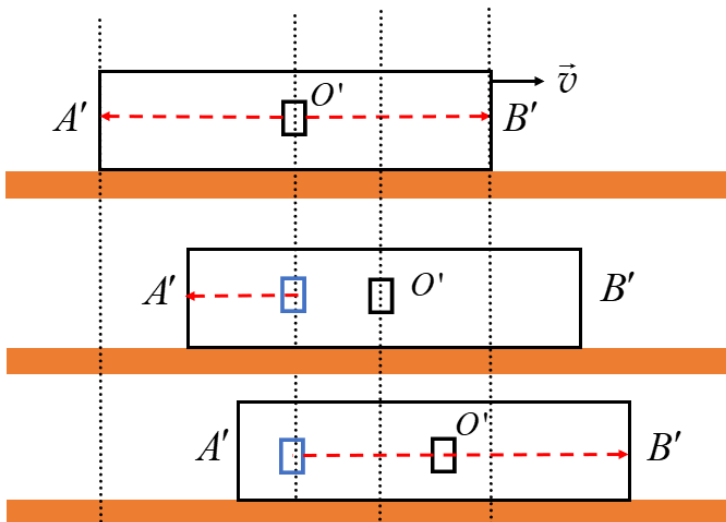
老师，您能再解释一下为什么在火车的例子中不能用S系的 $x_A - x_B$ 吗？当时说这样减没有意义，是说用同一参考系测出的两个不同时间对应的不同地点做差没有意义吗？

ZKY 2025/4/9 12:33:54

我没看懂你的目的是什么，你了解什么？

你想求的是什么？

如何定量描述这种“**同时的相对性**”？



你能搞懂这名同学的
疑虑到底是什么？
(2025. 04. 09)

ZKY 2025/4/9 13:25:57

我课堂讲授了以下几个内容：

- 1) 如何在不同惯性参考系描述一个事件
- 2) 两个事件的时间间隔和空间间隔
- 3) 固有时和测量时间
- 4) 固有长度和测量长度

没了

2025/4/9 15:28:55

就是在讲同时的相对性时候讲火车上光源的例子，为什么不能用S系的 $x_B - x_A$ ，我不太理解为什么不能用两个时间测出的两个位置坐标相减

ZKY 2025/4/9 15:53:46

明天中午我12:30-13:30在二楼答疑室，见面聊

2025/4/9 15:54:06

好的，谢谢老师



谢 谢