

典型例题选讲2 —— 电磁部分

大学物理B、C、D 期末复习



1. 知识点梳理 —— ② 电磁部分

- 静电学1：电荷量子化、电荷守恒定律、库仑定律、电场强度、电场叠加原理、高斯定理及其应用
- 静电学2：静电场力的功、静电场环路定理、静电势能、电势差和电势、电势叠加原理
- 静电学3：静电场中的导体、电介质的极化、电位移矢量、电介质时的高斯定理、电容和电容器
- 静电学4：点电荷系统的电能、电容器的能量、静电场的能量、能量密度
- 恒定磁场1：电流密度、电流连续性方程、恒定电流、欧姆定律微分形式、电动势
- 恒定磁场2：磁感应强度、磁通量、磁场的高斯定理、毕奥—萨伐尔定律及应用
- 恒定磁场3：真空中的高斯定理及应用、安培环路定理及应用、磁场的力学效应
- 恒定磁场4：磁介质的磁化、磁介质中的高斯定理和安培环路定理
- 电磁感应1：法拉第电磁感应定律、动生和感生电动势、互感和自感、磁场能量
- 电磁感应2：位移电流、普遍的安培环路定理（全电流定律）、麦克斯韦方程组

大物B拓展：陀螺导航仪、直升机螺旋翼的设计、航天器的姿态调整；陀螺导航仪、直升机螺旋翼的设计、航天器的姿态调整；静电分离、静电除尘、静电屏蔽及其工程应用；磁镜、磁瓶、磁聚焦

大物C拓展：惯性传感和MEMS；惯性传感和MEMS；压电传感器基本原理；霍尔效应的基本原理及其应用

大物D拓展：火箭飞行原理、三种宇宙速度；刚体的进动；静电屏蔽；电磁弹射

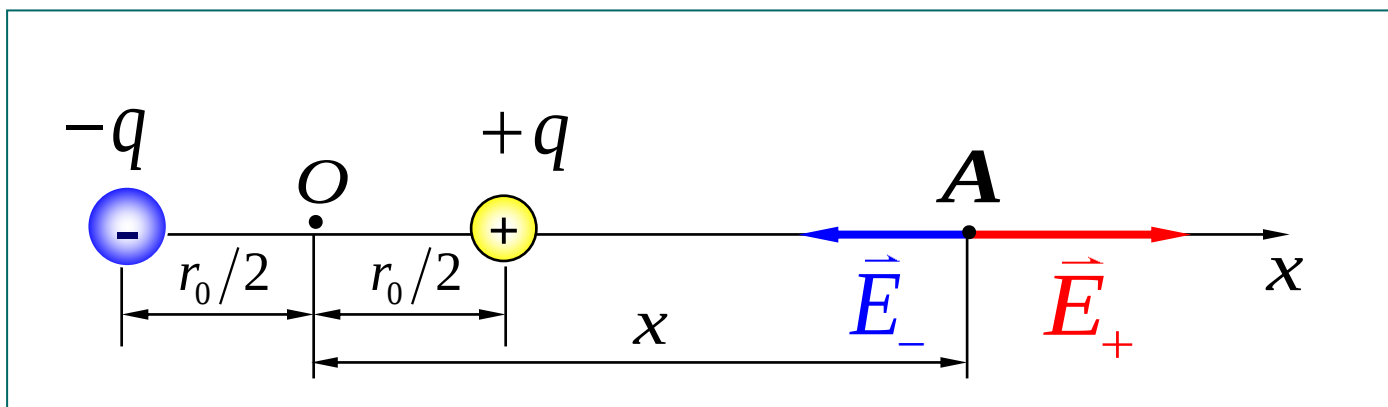


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例1. 求解电偶极子轴线中垂线上和延长线上任一点的电场强度。

解： 延长线上任意点 A (板书推导)

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2xr_0}{(x^2 - r_0^2/4)^2} \right] \vec{i} \xrightarrow{x \gg r_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{x^3}.$$





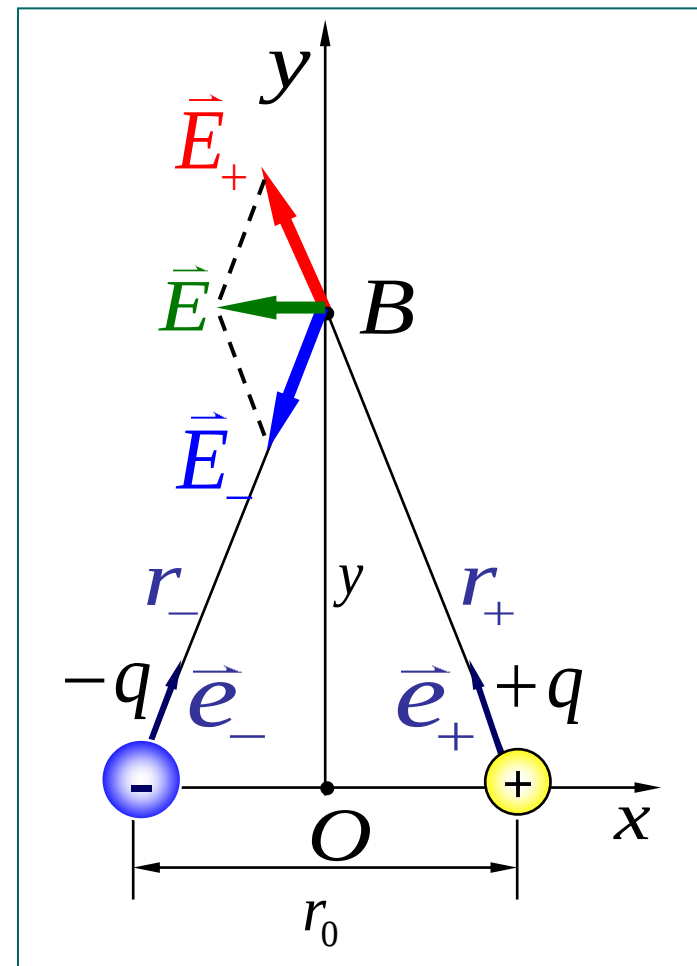
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

解： 中垂线上任意点 B (板书推导)

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+^2} \vec{e}_+, \quad \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-^2} \vec{e}_-.$$

$$r_+ = r_- = r = \sqrt{y^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3} \xrightarrow{y \gg r_0} \boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}}.$$

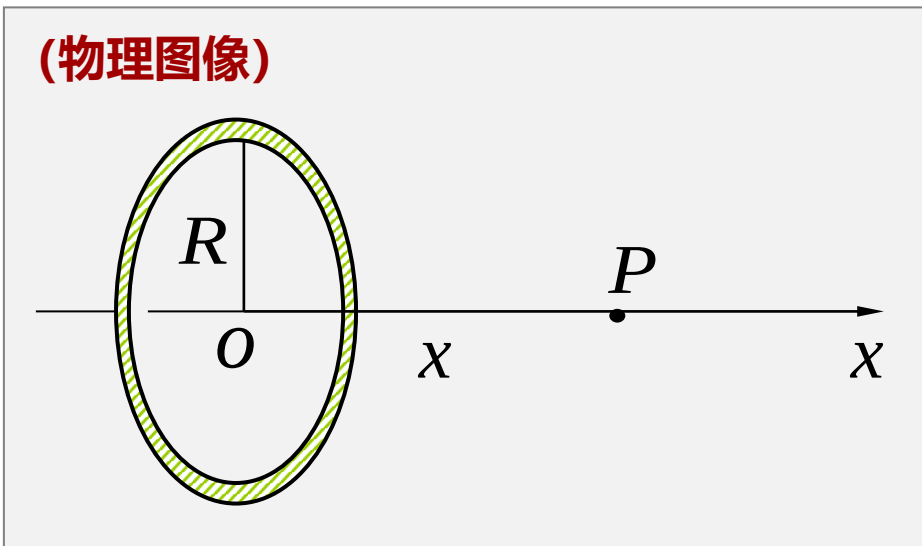




2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例2. 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的圆环上. 计算通过环心点 O 并垂直圆环平面的轴线上任一点 P 处的电场强度.

(物理图像)





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

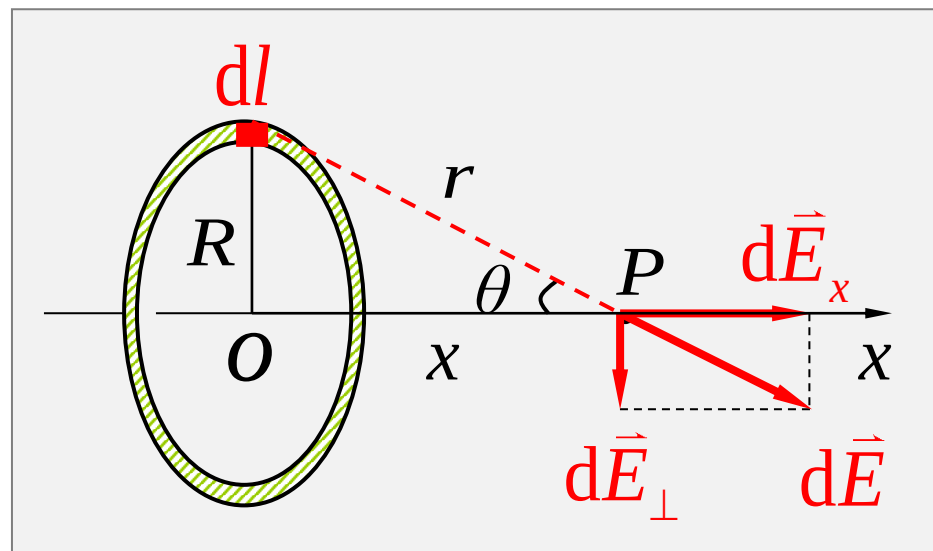
例2. 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的圆环上. 计算通过环心点 O 并垂直圆环平面的轴线上任一点 P 处的电场强度.

解: 板书推导

$$E_{\perp} = \int_l dE_{\perp} = 0.$$

只考虑 x 方向分量

$$\begin{aligned} E &= \int_l dE_x = \int_l dE \cos\theta \\ &= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例2. 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的圆环上. 计算通过环心点 O 并垂直圆环平面的轴线上任一点 P 处的电场强度.

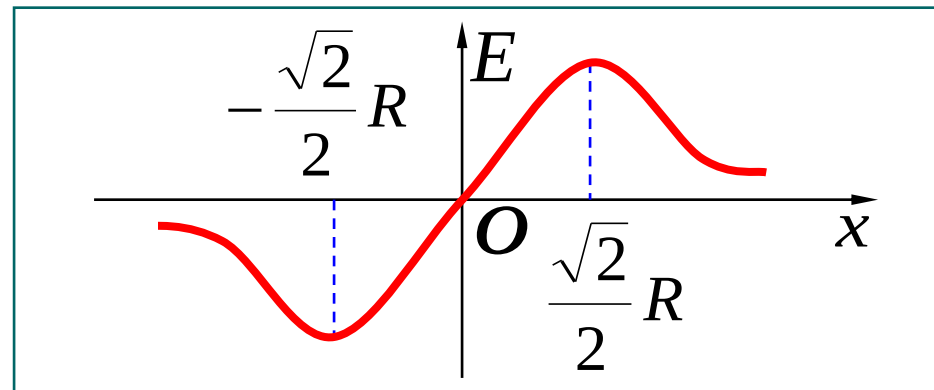
解: 分析
讨论

$$(1) \quad x \gg R \quad E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

$$(2) \quad x = 0 \quad E_O = 0$$

$$(3) \quad \frac{dE}{dx} = 0 \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

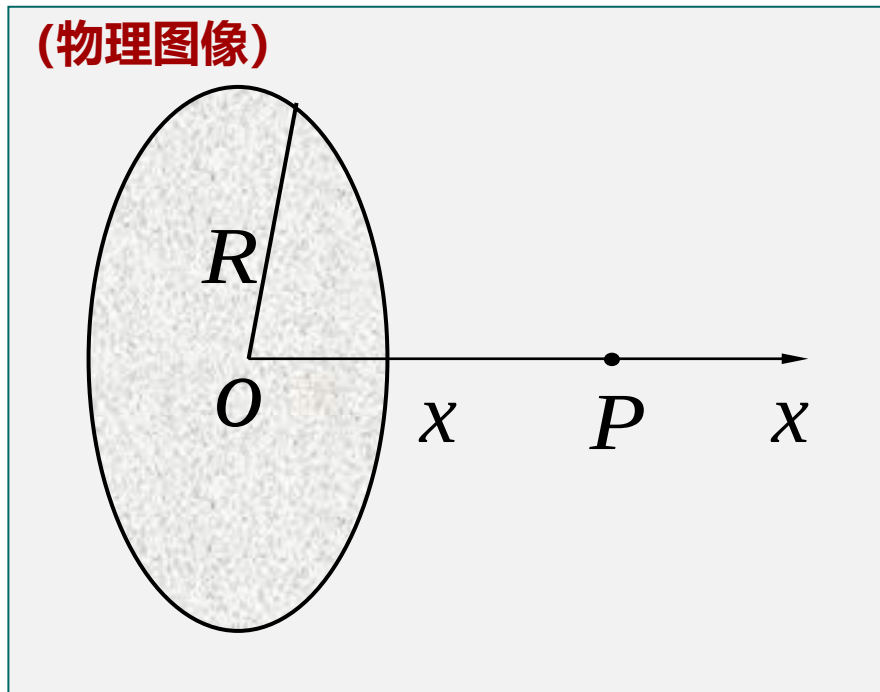




2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例3. 有一半半径为 R ，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ 。求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度。

(物理图像)





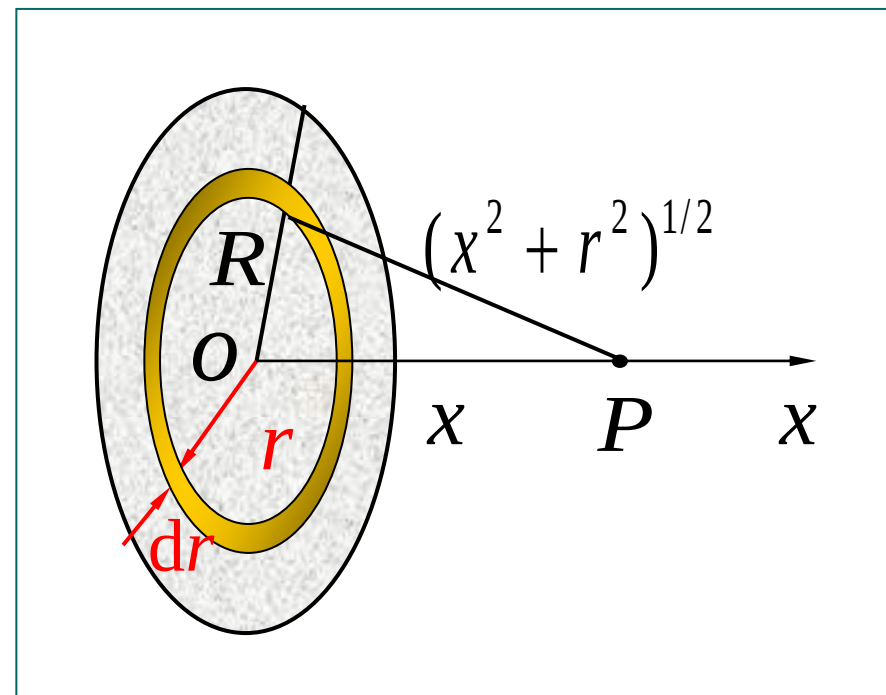
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例3. 有一半径为 R ，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ 。求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度。

解： 板书推导

$$dE_x = \frac{x dq}{4 \pi \epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \frac{x r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2 \epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例3. 有一半径为 R ，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ 。求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度。

解： 分析
讨论

$$E = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right).$$

$$(1) \quad x \ll R \quad E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$(2) \quad x \gg R \quad E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

请思考：如何理解
 $x \ll R$ 和 $x \gg R$ ？



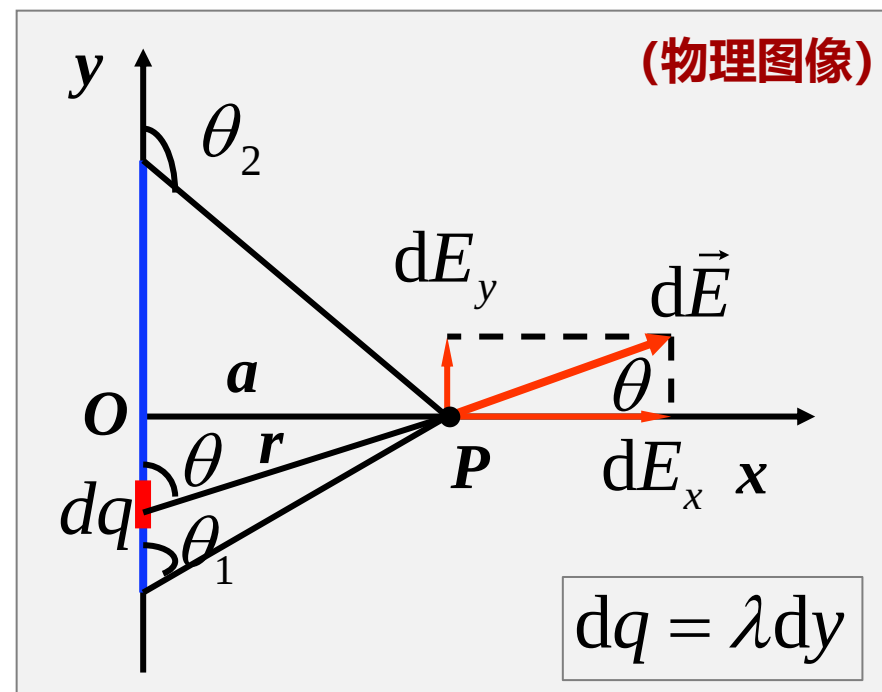
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例4. 有一**均匀带电直线**，求其周围的电场强度。

解： 板书推导

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1).$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例4. 有一均匀带电直线，求其周围的电场强度。

解： 分析
讨论

(1) P 点落在带电直线的**中垂线**上：

$$E_y = 0.$$

(2) 带电直线为**无限长**时：

$$E \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1).$$

请思考：如何理解
无限长？



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例5. 真空中高斯定理的推导与证明

(以点电荷和点电荷系激发的电场为例)

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以真空介电常数 ϵ_0 ，与闭合曲面外电荷无关。

(1) 包围点电荷 q 的同心球面 S 电场强度通量的计算：

(2) 包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S 电场强度通量：

(3) 不包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S 电场强度通量：

(4) 推广到点电荷系激发的电场：

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i^{\text{in}}$$



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例6. 已知在正方体的一个顶点 D 处有一个带电量为 $+q$ 的点电荷，求通过面 $ABEFA$ 的电场强度通量。

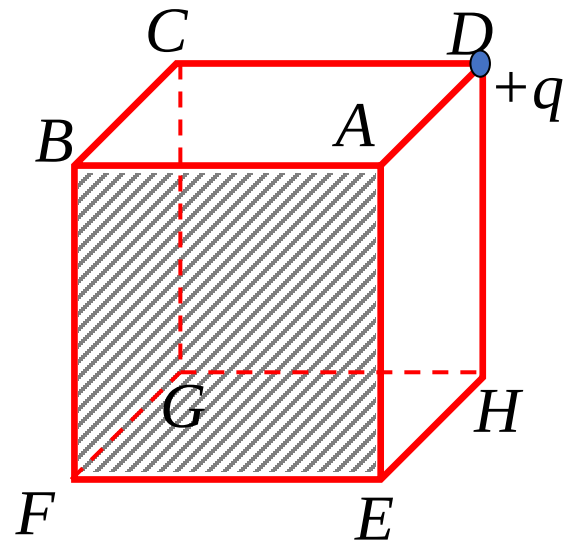
答案： $\frac{q}{24\epsilon_0}$.

- 请同学们讨论并思考：该答案是如何给出的？

→ 电场线的空间分布规律.

→ 空间对称性.

→ 立体几何的想象力.



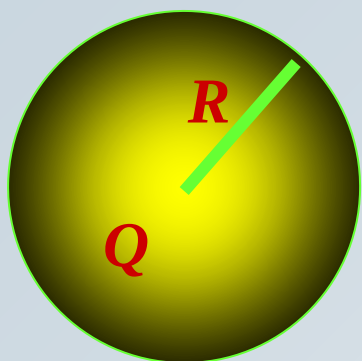


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例7. 求均匀带电的球体内外的场强分布。设球体半径为 R ，所带总带电为 Q 。

对称性分析: 思路: 将球体看成许多薄球壳组成。

- 任意点的电场强度方向必然沿径向;



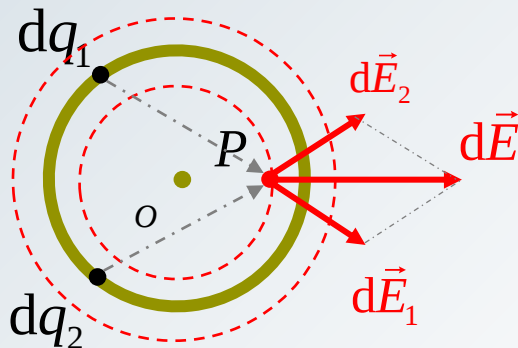
均匀带电球体

物理图像

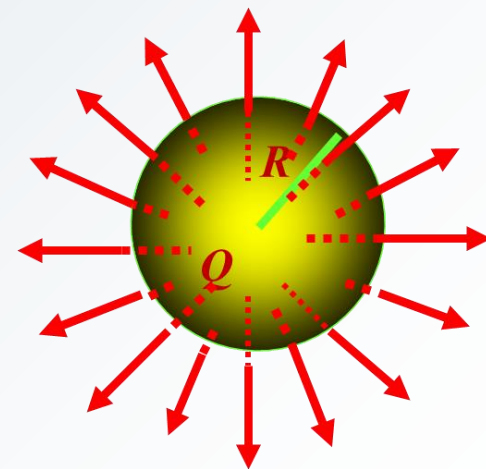


均匀带电球壳

- 距离球心相同点的电场强度大小相等。



电场强度分析



电场线空间分布



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例7. 求均匀带电的球体内外的场强分布。设球体半径为 R ，所带总带电为 Q 。

应用高斯定理求解：

解：作半径为 r 的球面

球内任一点 ($0 \leq r < R$)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S_{\text{内}}} q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \cdot V$$



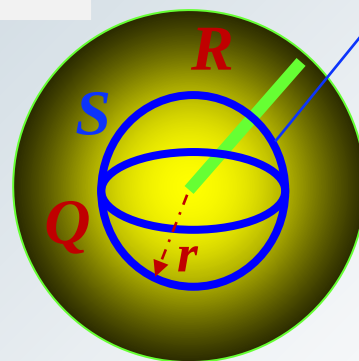
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

→
$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_e r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$$

物理图像

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



球体内部电场强度的大小
随半径线性增加，沿径向。



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例7. 求均匀带电的球体内外的场强分布。设球体半径为 R ，所带总带电为 Q 。

应用高斯定理求解：

解：作半径为 r 的球面

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S_{\text{内}}} q_i = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

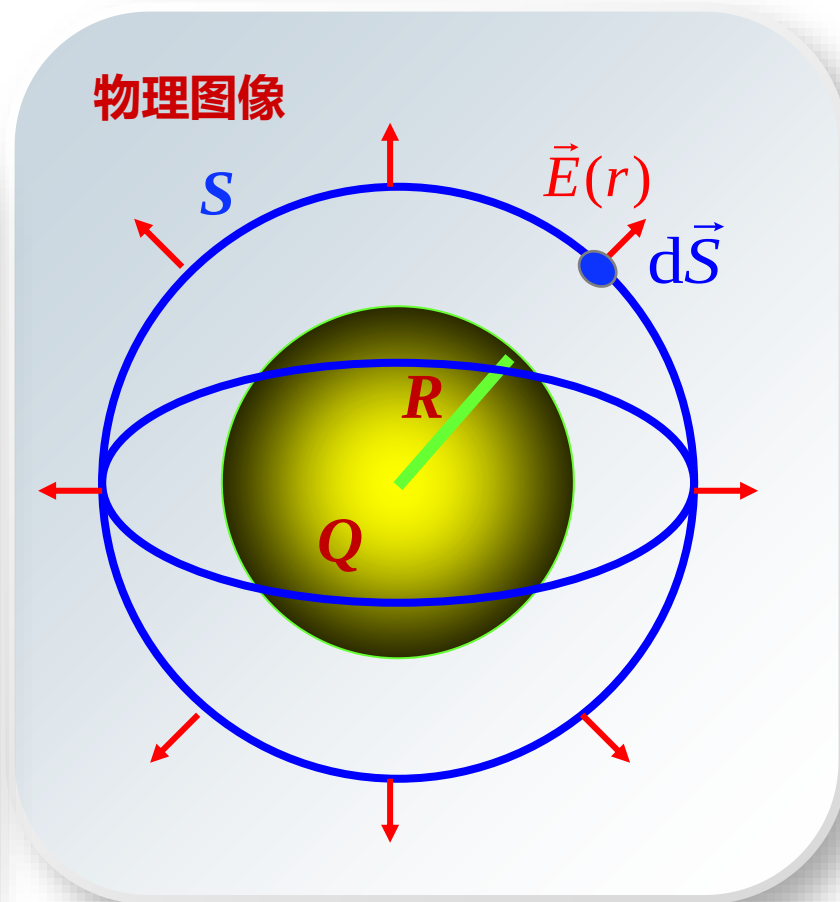
$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

球外任一点 ($R \leq r < \infty$)

这与位于球心处、且带量为 Q 的点电荷所产生的电场强度相同。

(关于库仑扭秤实验的思考)
(关于地球附近重力场的思考)





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例7. 求均匀带电的球体内外的场强分布。设球体半径为 R ，所带总带电为 Q 。

总结与作图分析：

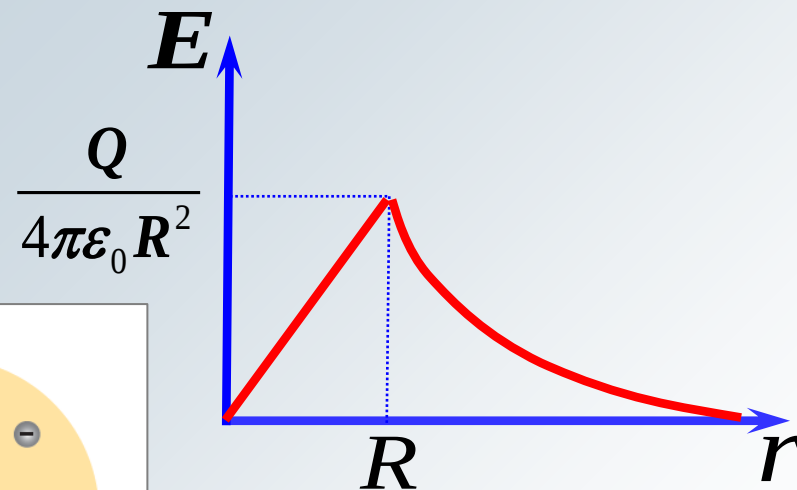
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdots (R < r < \infty) \\ \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r \cdots (0 \leq r < R) \end{cases}$$

正电荷
电子



图 4.3-2 J. J. 汤姆孙的原子模型

电场分布曲线



电场强度在空间连续分布。



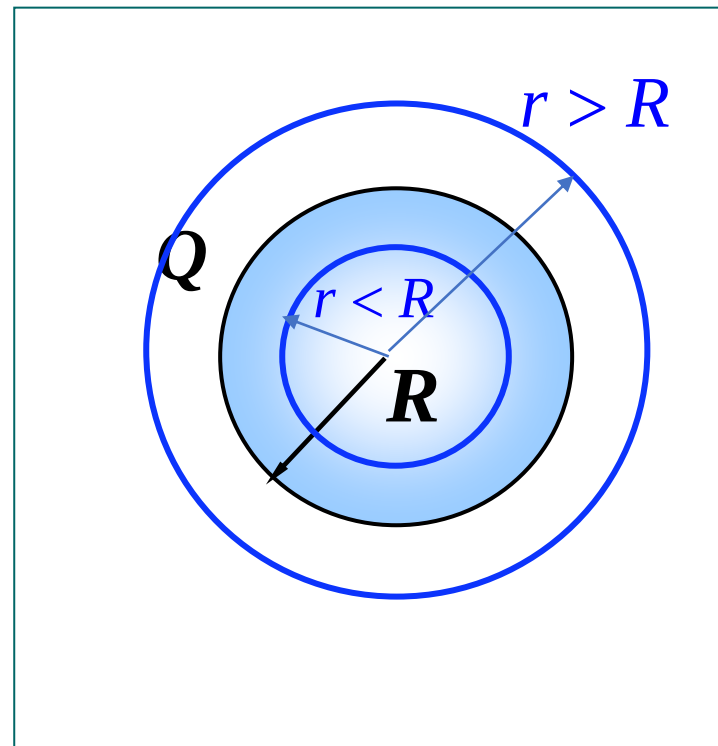
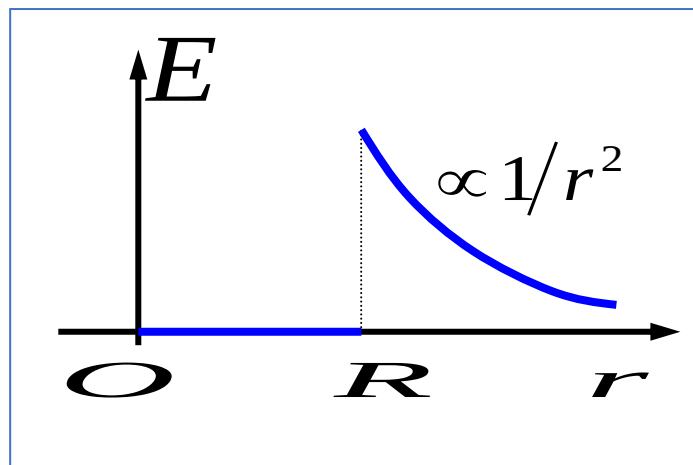
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例8. 求均匀带电的球面内外的场强分布。设球面半径为 R ，所带总带电为 Q 。

解： 同理可得：

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & (r \geq R) \\ 0 & (r \leq R) \end{cases}$$

如何理解在 $r = R$ 处
电场强度的突变？



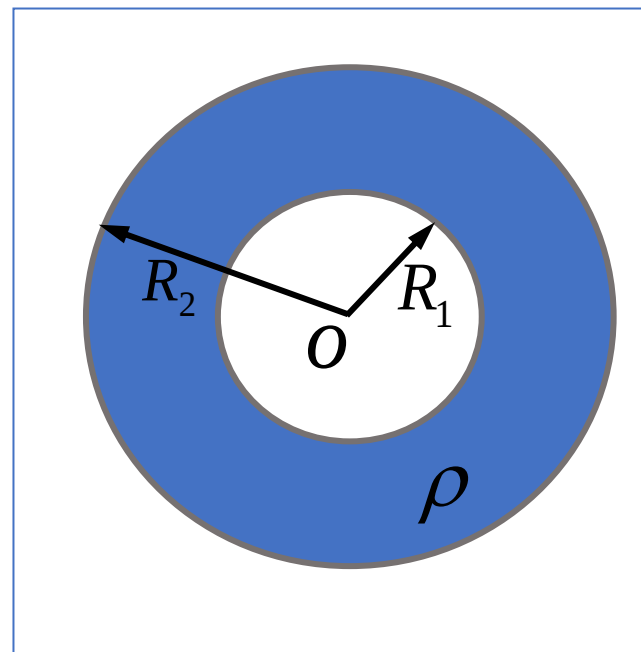


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例9. 请讨论均匀带电球层的场强分布。设球层内外半径分别为 R_1 和 R_2 ，电荷体密度为 ρ 。

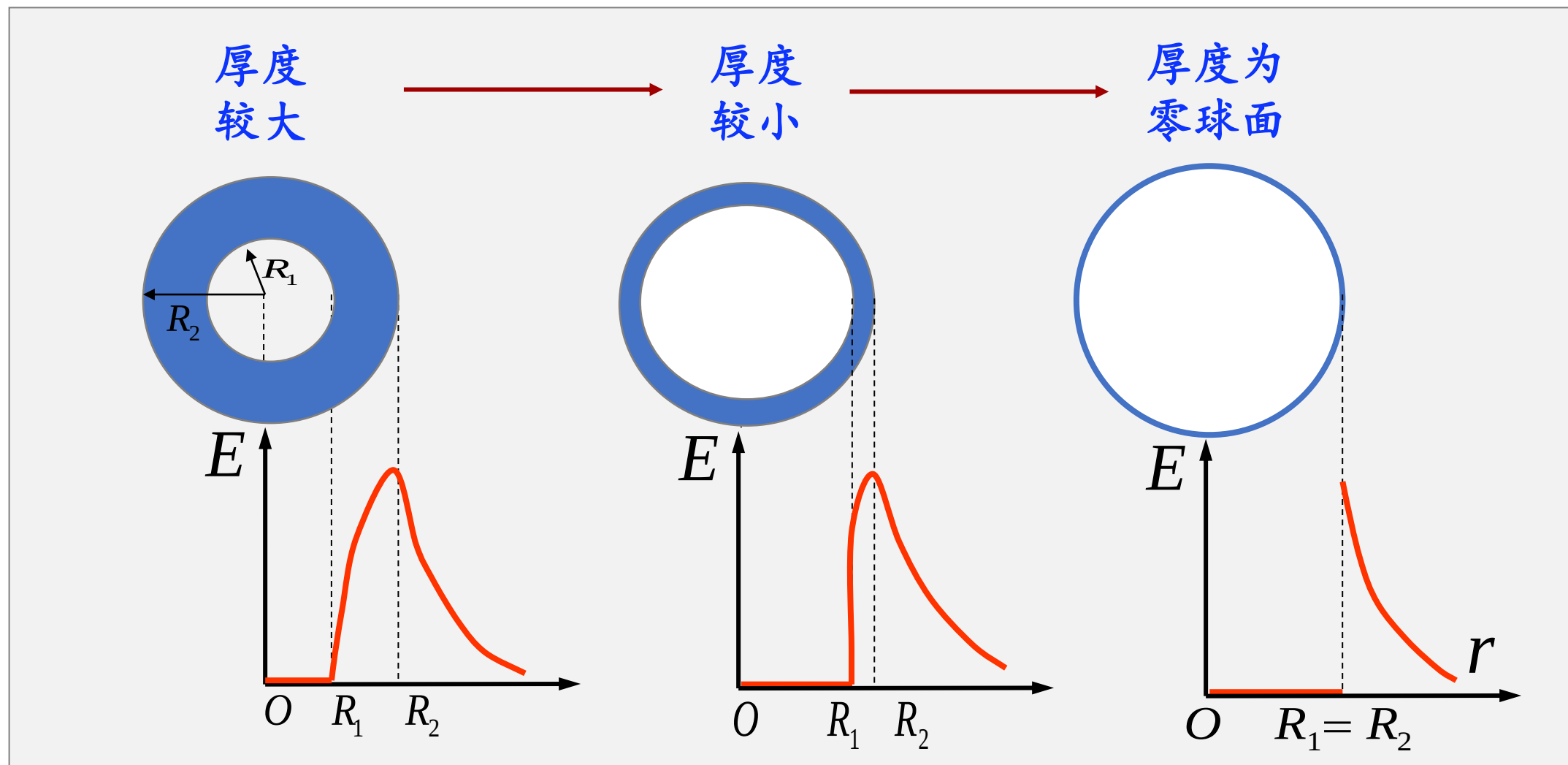
解： 同理可得：

$$E(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (r \leq R_1) \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r \geq R_2) \end{cases}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分



请思考：自然界是否存在厚度为零的**带电球面**？



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

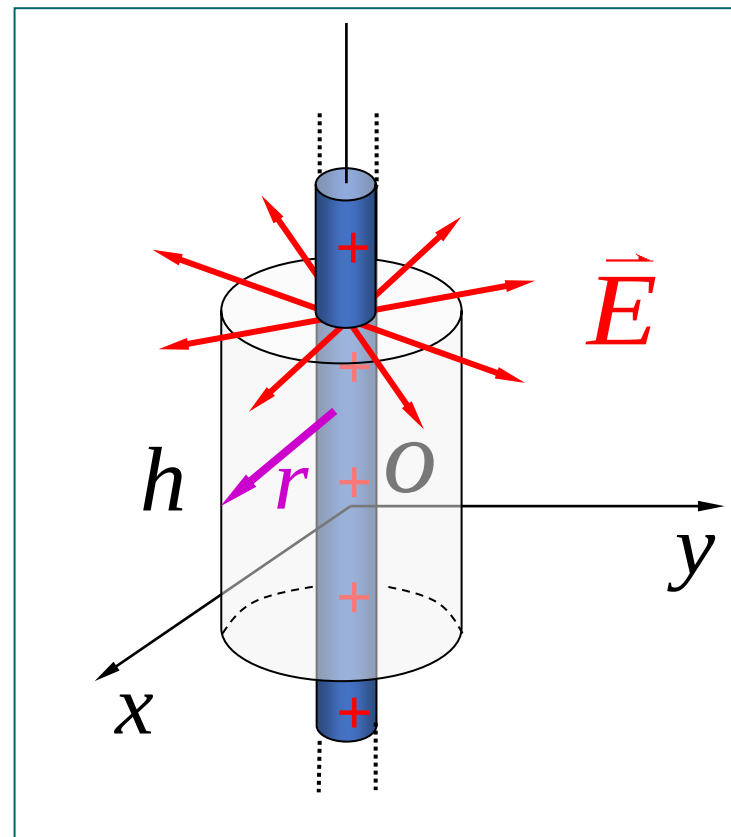
例10. 请设有一无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为 λ ，求距直线为 r 处的电场强

解： 判断带电直线周围场强的分布
规律：**轴对称**

作如图所示的**高斯面**

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

→ $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例11. 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处某点的电场强度。

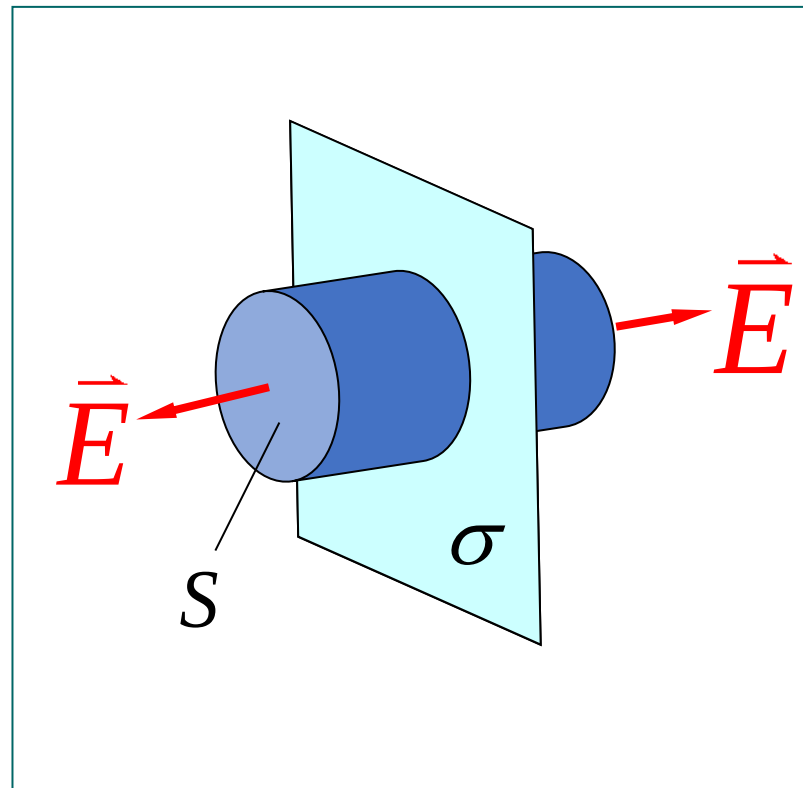
解： 判断带电直线周围场强的分布
规律：**面对称**

作如图所示的**高斯面**

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E \cdot S = \sigma S / \varepsilon_0$$



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



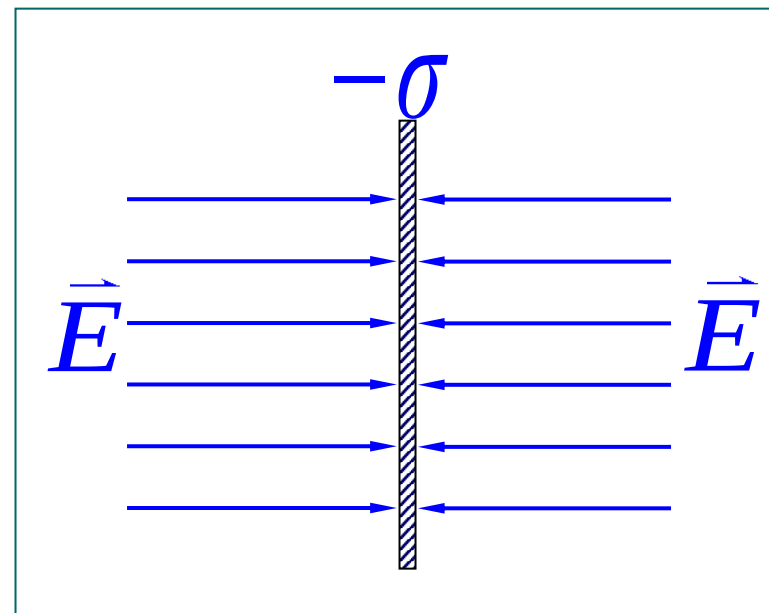
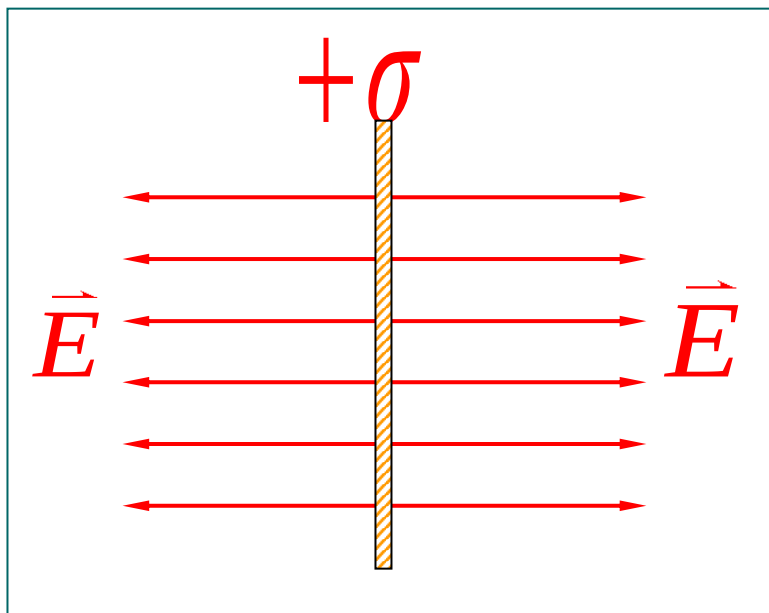


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例11. 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处某点的电场强度。

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

推广一：



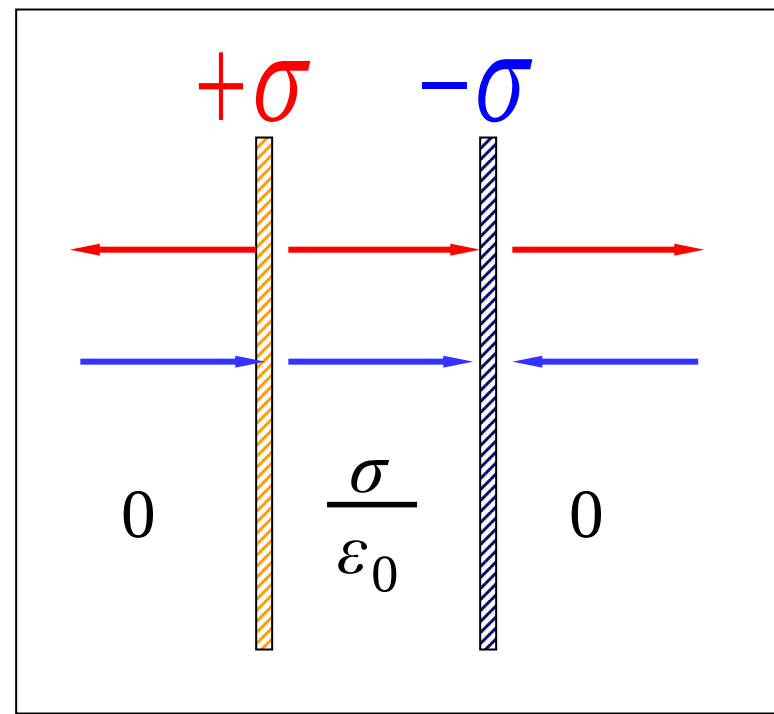
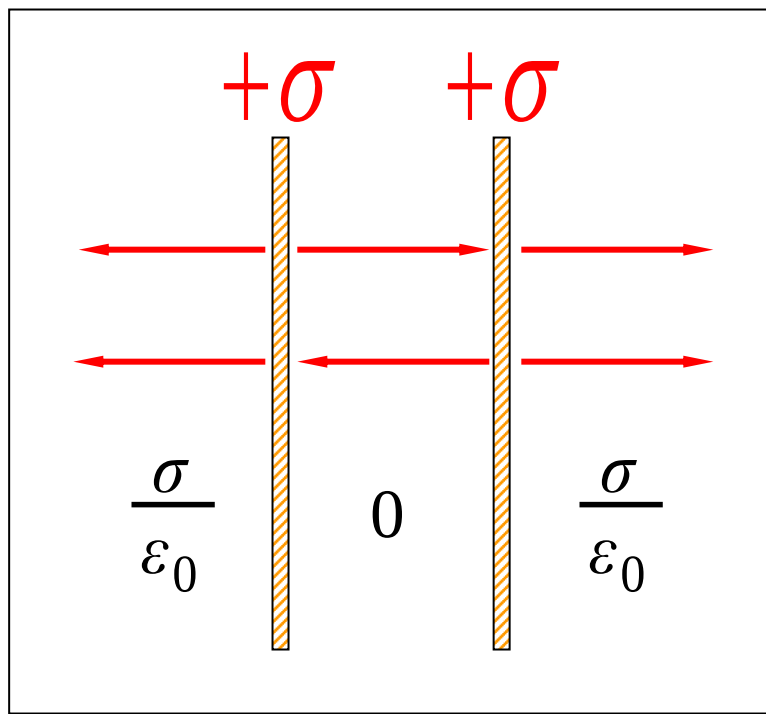


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例11. 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处某点的电场强度。

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

推广二：



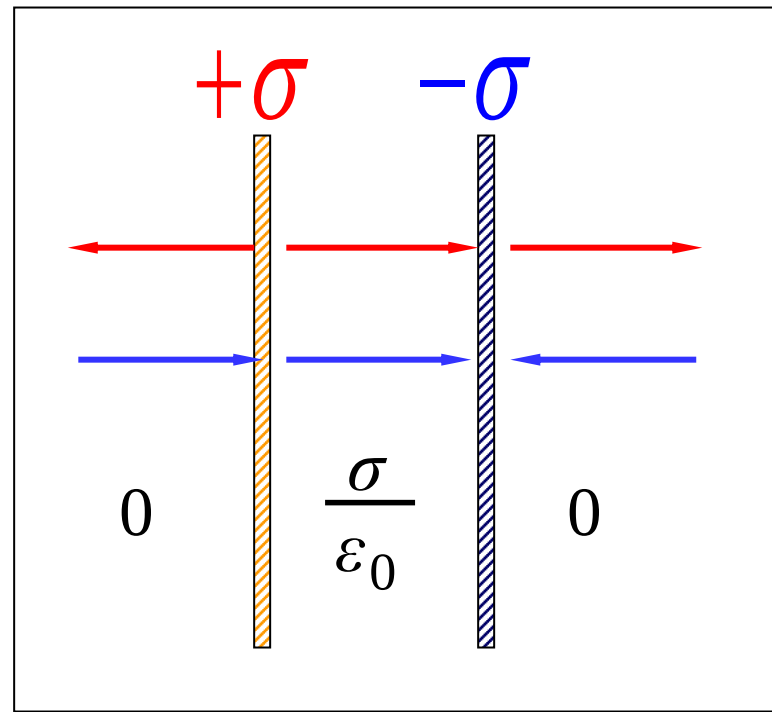
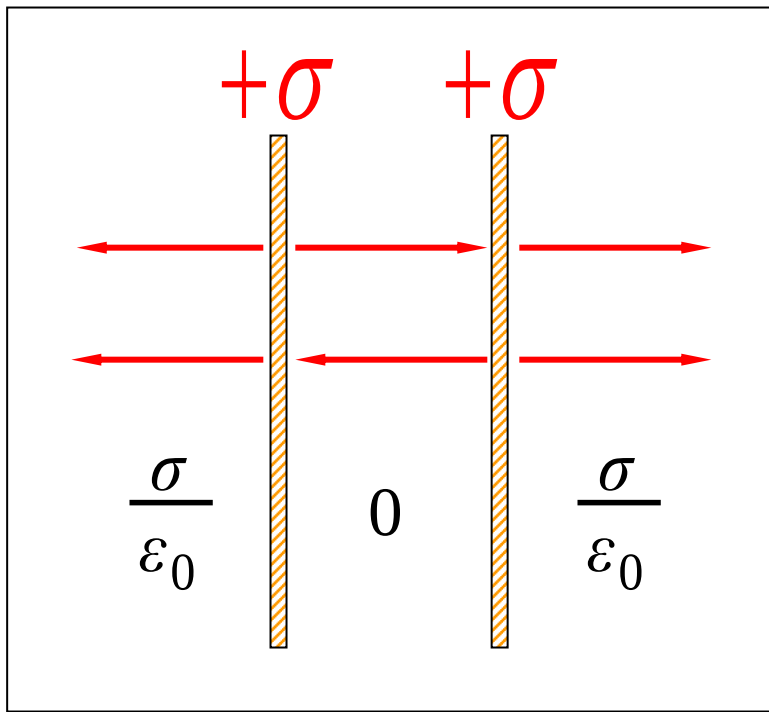


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例11. 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处某点的电场强度。

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

推广二：



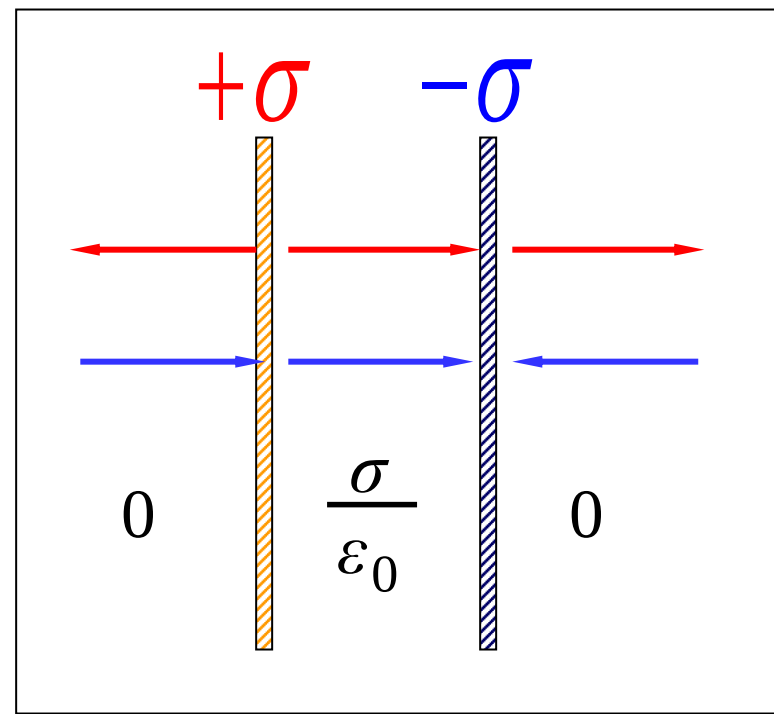
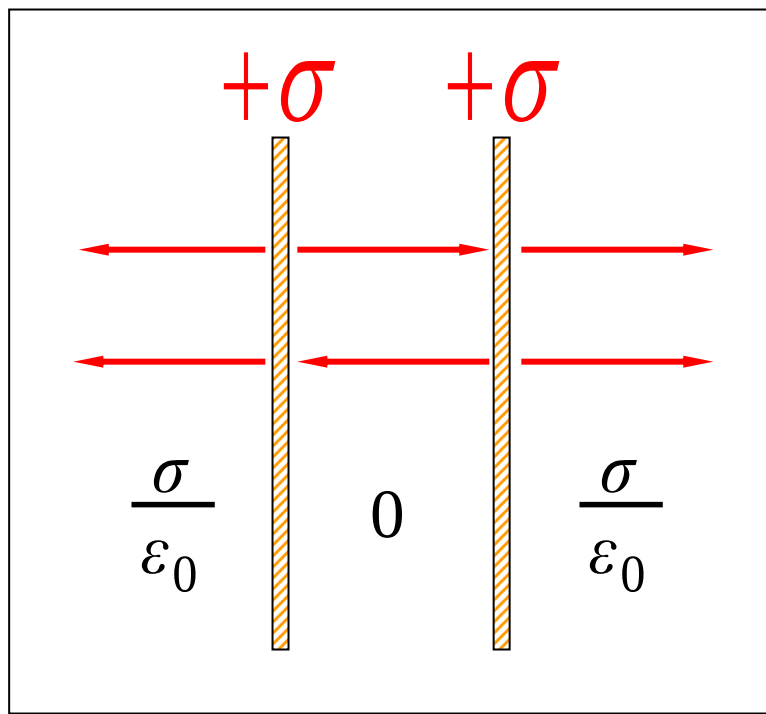


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例11. 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为 σ ，求距平面为 r 处某点的电场强度。

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

推广二：





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例12. 静电场力做功与路径无关的推导

一、点电荷的电场

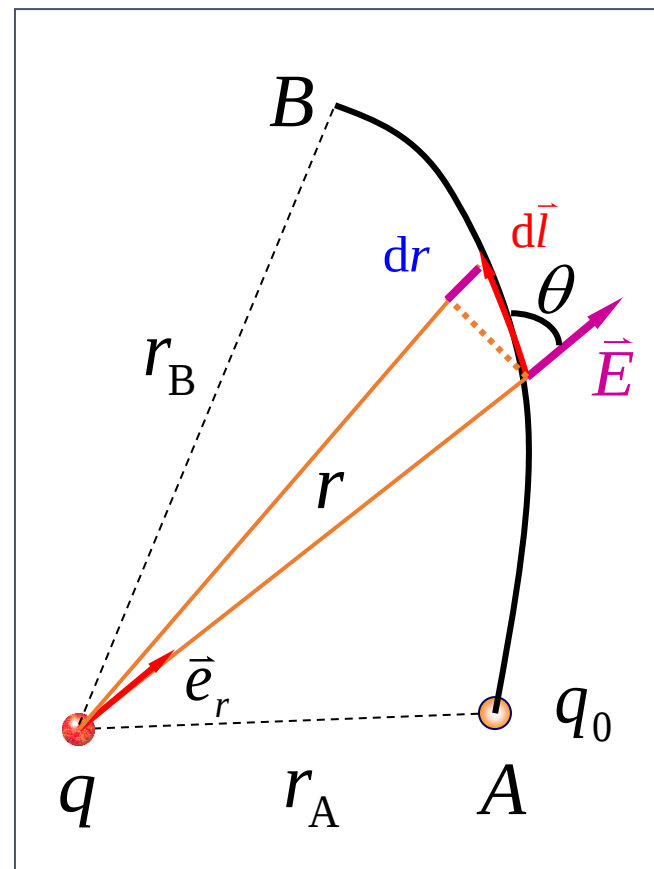
$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \xrightarrow{\quad dl \cos \theta = dr \quad}$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \boxed{\vec{e}_r \cdot d\vec{l}}$$

$$\Rightarrow dW = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

做功与路径无关

$$\Rightarrow W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例12. 静电场力做功与路径无关的推导

二、任意带电体产生的电场

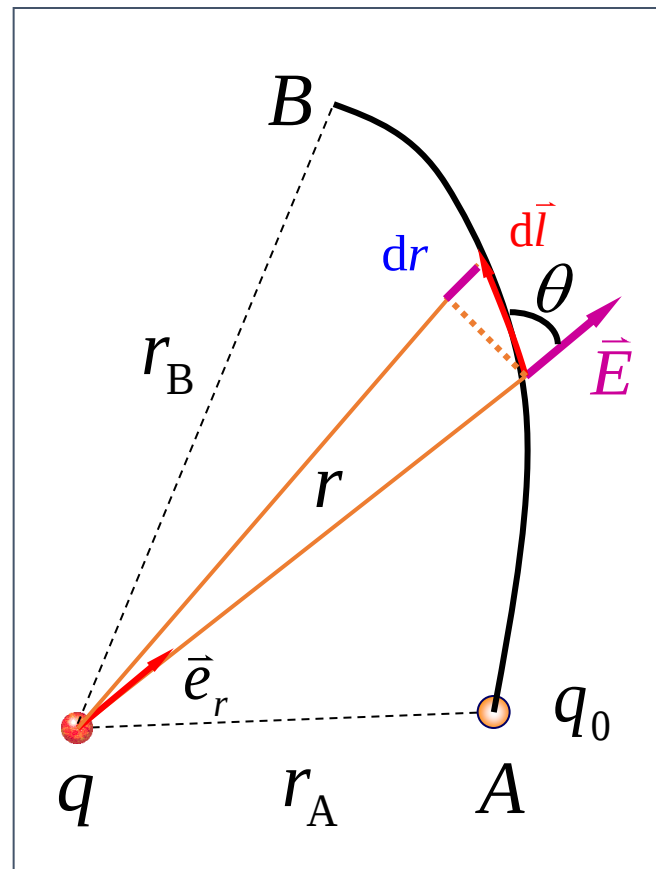
- 任意带电体 → **点电荷**的组合

- 任意点的电场强度满足**叠加原理**

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

$$\Rightarrow W = q_0 \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_i q_0 \int_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

结论：**静电场力做功，与路径无关。**





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例13. 在玻尔的氢原子模型中，处于最低能量状态的电子位于以原子核（一个质子）为中心的半径为 $a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{m}$ 的圆轨道上（玻尔半径）。求质子在该轨道处产生的电势和电子在此轨道上的电势能。

解：

$$U = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0} = 27.2 \text{V} \quad (\text{电势})$$

$$\begin{aligned} E_p &= -eU \\ &= -27.2 \text{eV} \\ &= -4.35 \times 10^{-18} \text{J} \quad (\text{电势能}) \end{aligned}$$

思考1：可否计算电子绕核运动的线速度大小？

思考2：可否计算电子绕核运动的角速度大小？

思考3：可否计算电子相对于原子核的角动量大小？

思考4：可否计算电子与原子核之间的万有引力与库仑力大小？



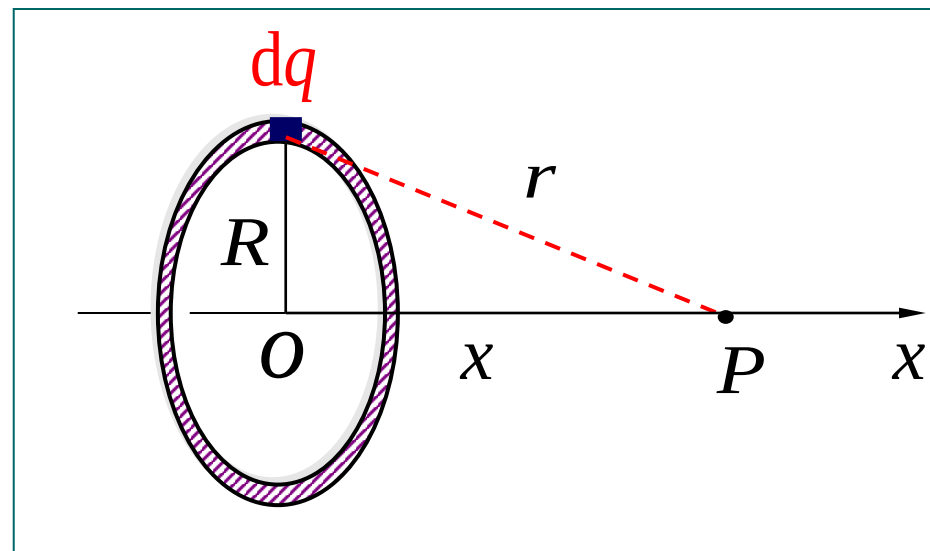
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例14. 在正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上. 求环轴线上距环心为 x 处的点 P 的电势.

解:
$$dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}.$$

利用电势的叠加原理:

$$\begin{aligned} U_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}. \end{aligned}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

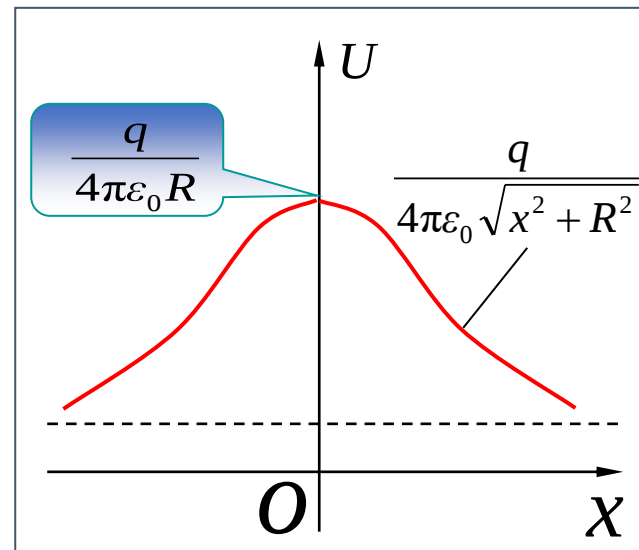
例14. 在正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上. 求环轴线上距环心为 x 处的点 P 的电势.

$$U(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}.$$

讨论:

$$x = 0, \quad V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$x \gg R, \quad V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

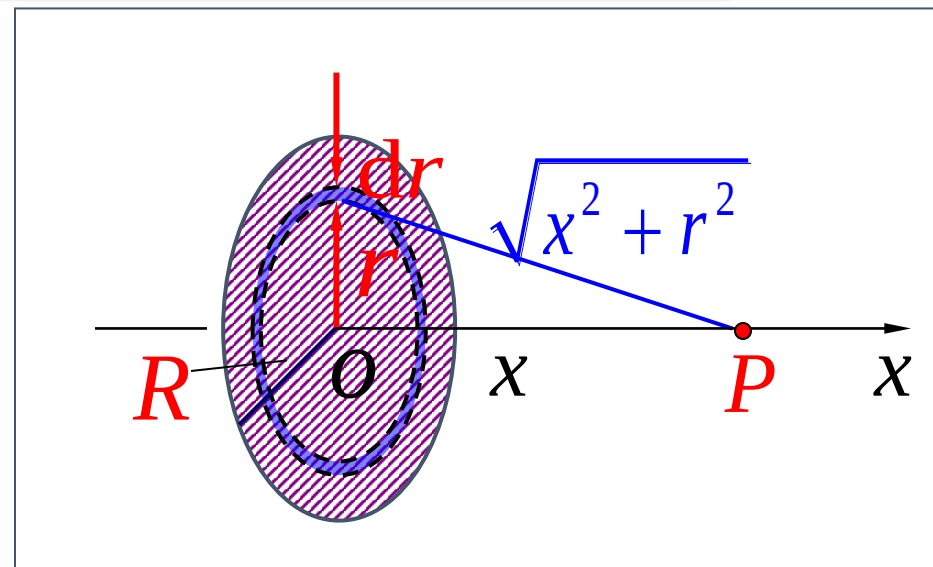
例15. 求通过一均匀带电圆盘中心且垂直平面的轴线上任意点的电势. (已知圆盘半径为 R , 电荷的面密度为 σ)

解: $dq = \sigma 2\pi r dr, \quad dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}.$

利用电势的叠加原理, 板书推导

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right).$$

思考: $x < 0$ 的电势表达式与之相同吗?



• $x \gg R$ $U \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$ (近似点电荷)

• $x \rightarrow 0$ $U \approx \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ (电势取有限值)



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例16. 在玻尔的真空中有一电荷为 Q ，半径为 R 的均匀带电球面. 试求：(1) 球面外两点 A, B 间的电势差； (2) 球面内任意两点间的电势差； (3) 球面外任意点的电势； (4) 球面内任意点的电势.

解： 板书推导

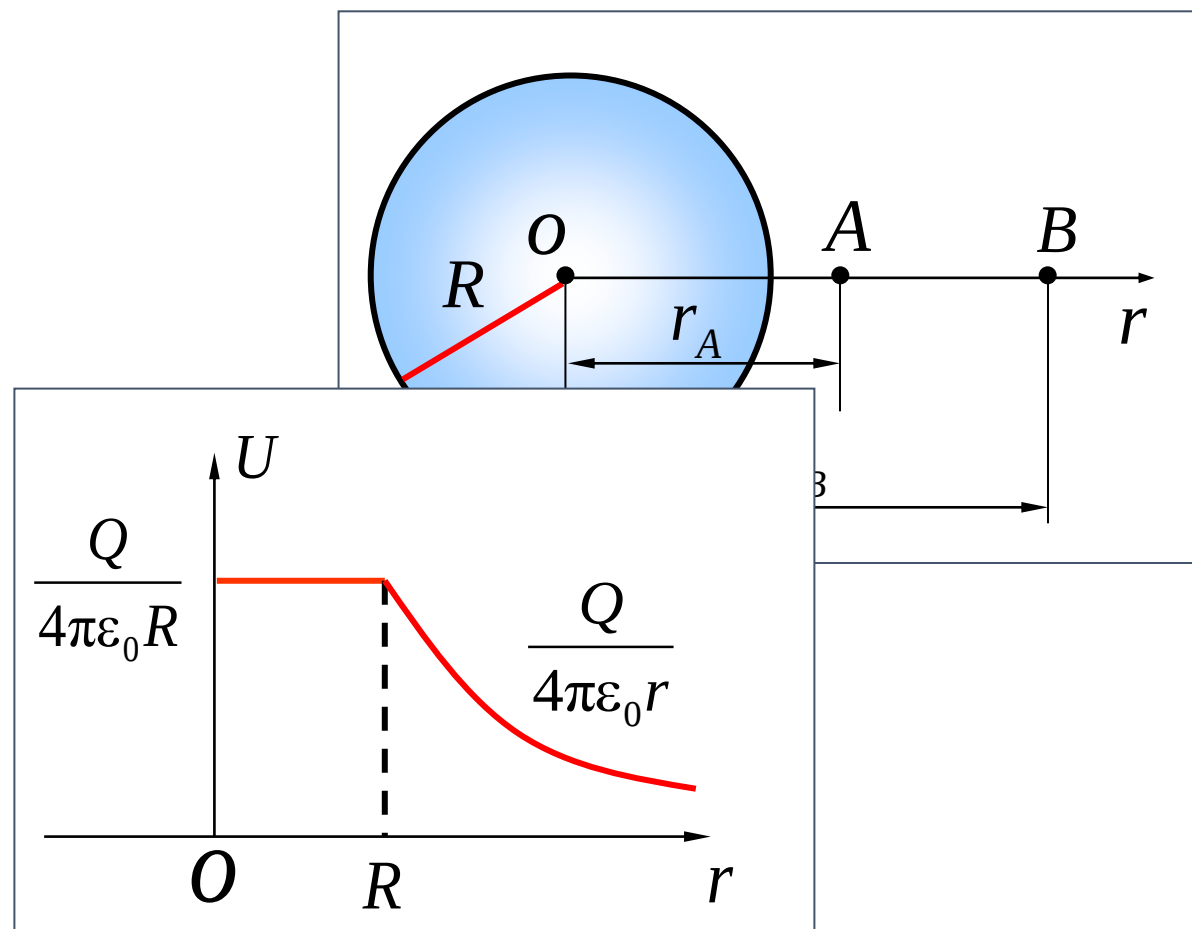
(1) 球面外： $U_A - U_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$

(2) 球面内： $\Delta U \equiv 0.$

(3-4) 取无穷远为电势零点：

$$r > R \longrightarrow U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

$$r < R \longrightarrow U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例17. 求“**无限长**”带电直导线的电势分布. 已知电荷线密度为 λ .

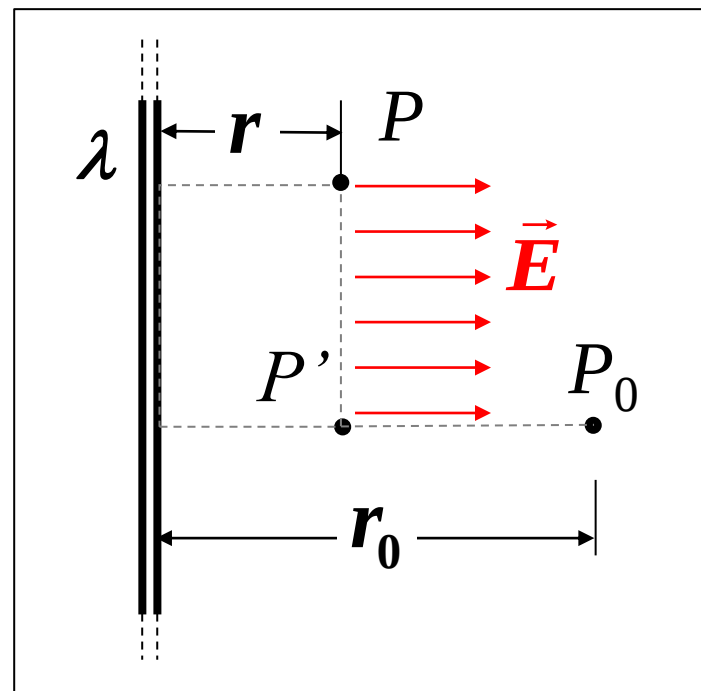
解: 利用静电场高斯定理, 可以求出电场分布规律

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$U(P) = U(P'). \quad \text{(两点电势相等)}$$

$$\begin{aligned} U(P) - U(P_0) &= U(P') - U(P_0) \\ &= \int_{P'}^P E dl = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right). \end{aligned}$$

(两点间电势差)





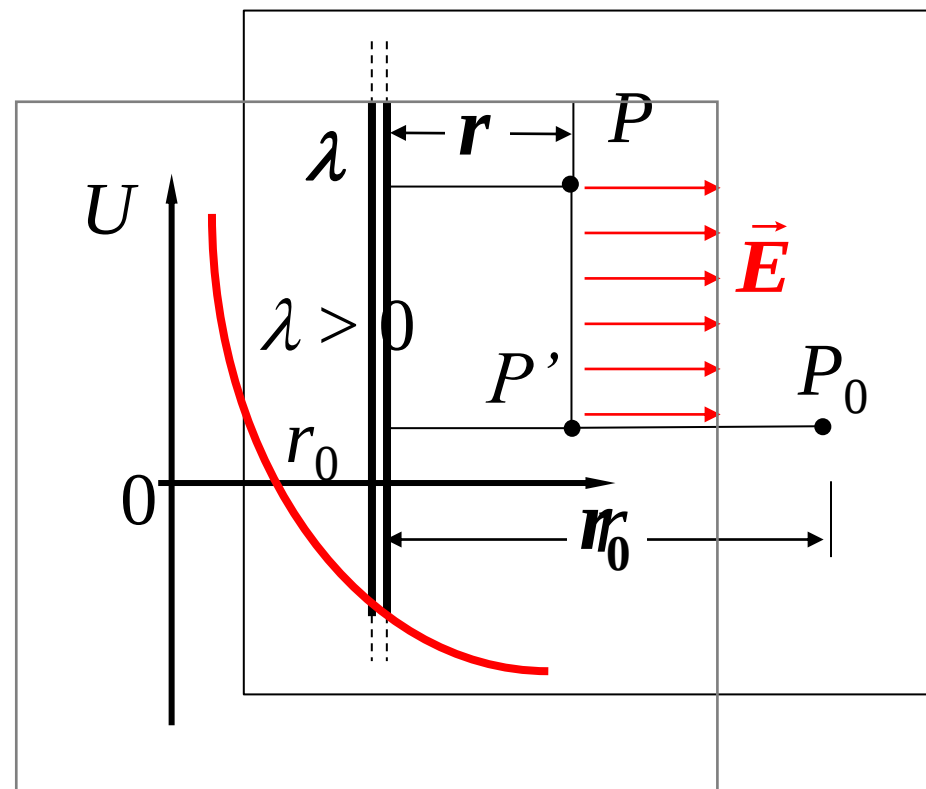
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例17. 求“**无限长**”带电直导线的电势分布. 已知电荷线密度为 λ .

讨论:
$$U(P) - U(P_0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

- 若取无穷远为电势零点, 上述积分发散.
- 可取有限远为电势零点: $U(P_0) = 0$.

→
$$U(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right).$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例18. 静电平衡条件的分析与思考过程

1. 电场强度条件

- 导体内部的电场强度处处为零.
- 导体表面附近电场强度垂直于导体表面.



2. 电势条件

- 静电平衡的导体是一个等势体.
- 导体表面是一个等势面.



3. 感应电荷分布规律

- 导体内部 没有感应电荷.
- 感应电荷只分布于导体表面.



静电屏蔽和尖端放电是怎么回事?



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例19. 静电平衡时导体表面电荷分布规律与尖端放电

1、导体内部净电荷处处为0，净电荷只分布于导体表面。

定量分析

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho_e dV = 0 \longrightarrow \boxed{\rho_{e\text{内}} = 0}$$

2、导体表面电场强度处处与表面垂直，它与感应电荷分布的关系如何？

板书推导

$$\boxed{E = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}}$$

导体表面的电荷面密度

导体表面附近的电场强度

思考：该结论与无限大平面附近的电场强度大小是否一致？



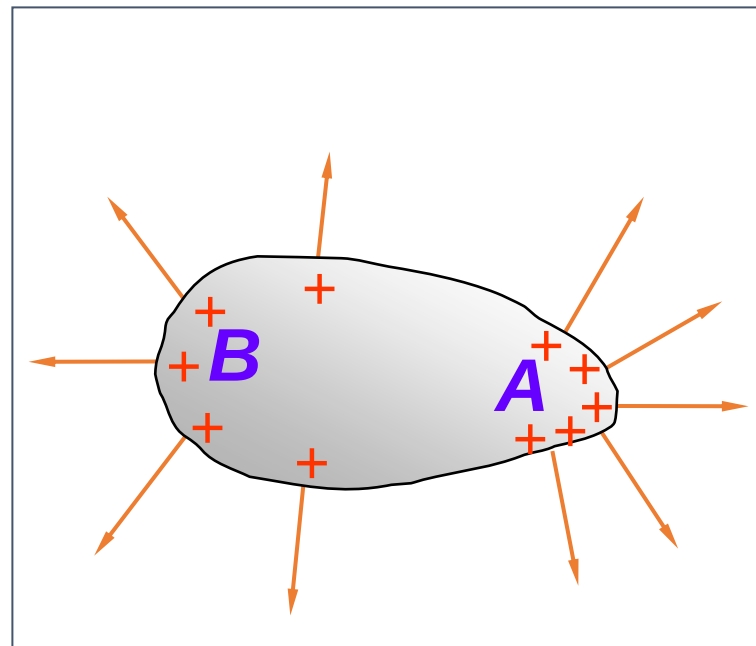
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例19. 静电平衡时导体表面电荷分布规律与尖端放电

3、导体静电平衡时，表面电荷面密度与曲率的关系？

板书完成建模与半定量分析

- A处曲率半径小， σ_e 大，E强；
- B处曲率半径大， σ_e 小，E弱；



尖端放电：带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离，而使导体产生放电现象。（演示实验：电风实验、静电转轮等）



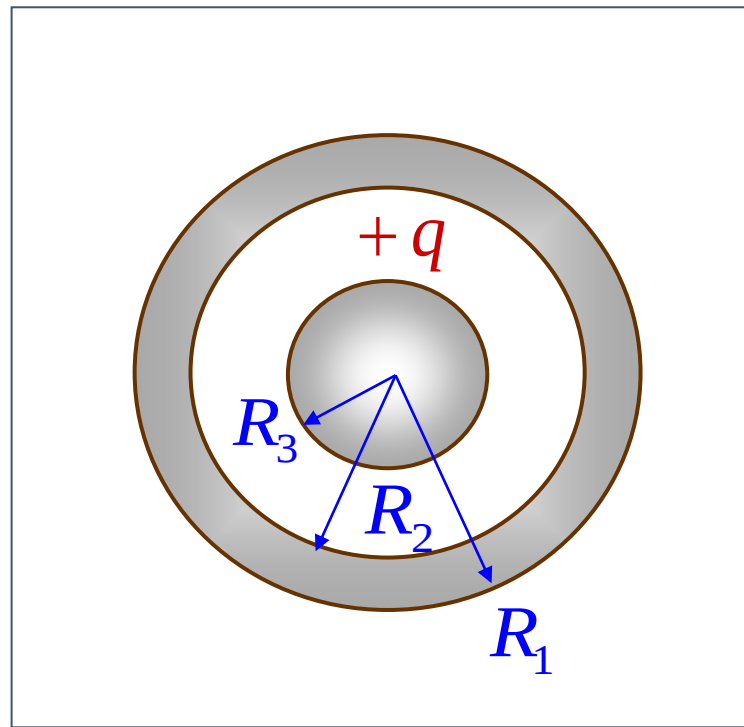
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例20. 有一外半径 $R_1=10\text{ cm}$, 内半径 $R_2=7\text{ cm}$ 的金属球壳, 在球壳中放一半径 $R_3=5\text{ cm}$ 的同心金属球. 若使球壳和球均带有 $q=10^{-8}\text{ C}$ 的正电荷, 问: 两球体上的电荷如何分布? 球心电势为多少?

板书讲解

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_1 = 0 & (r < R_3) \\ E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (R_3 < r < R_2) \\ E_3 = 0 & (R_2 < r < R_1) \\ E_4 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R_1) \end{array} \right.$$

$$U_O = \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right) = 2.31 \times 10^3 \text{ V}.$$



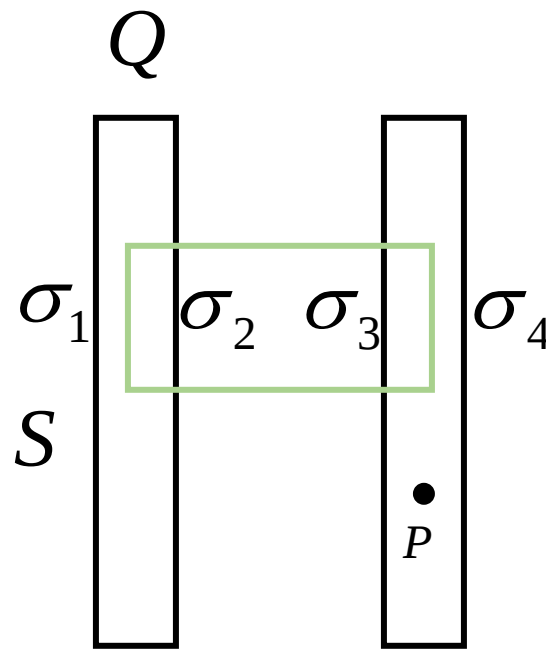


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例21. 一大导体板面积 S ，带电 Q ，另一同样大的不带电导体板，两板平行放置，求：两导体板的电荷分布。

板书讲解

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = -\sigma_3 = \frac{Q}{2S}.$$

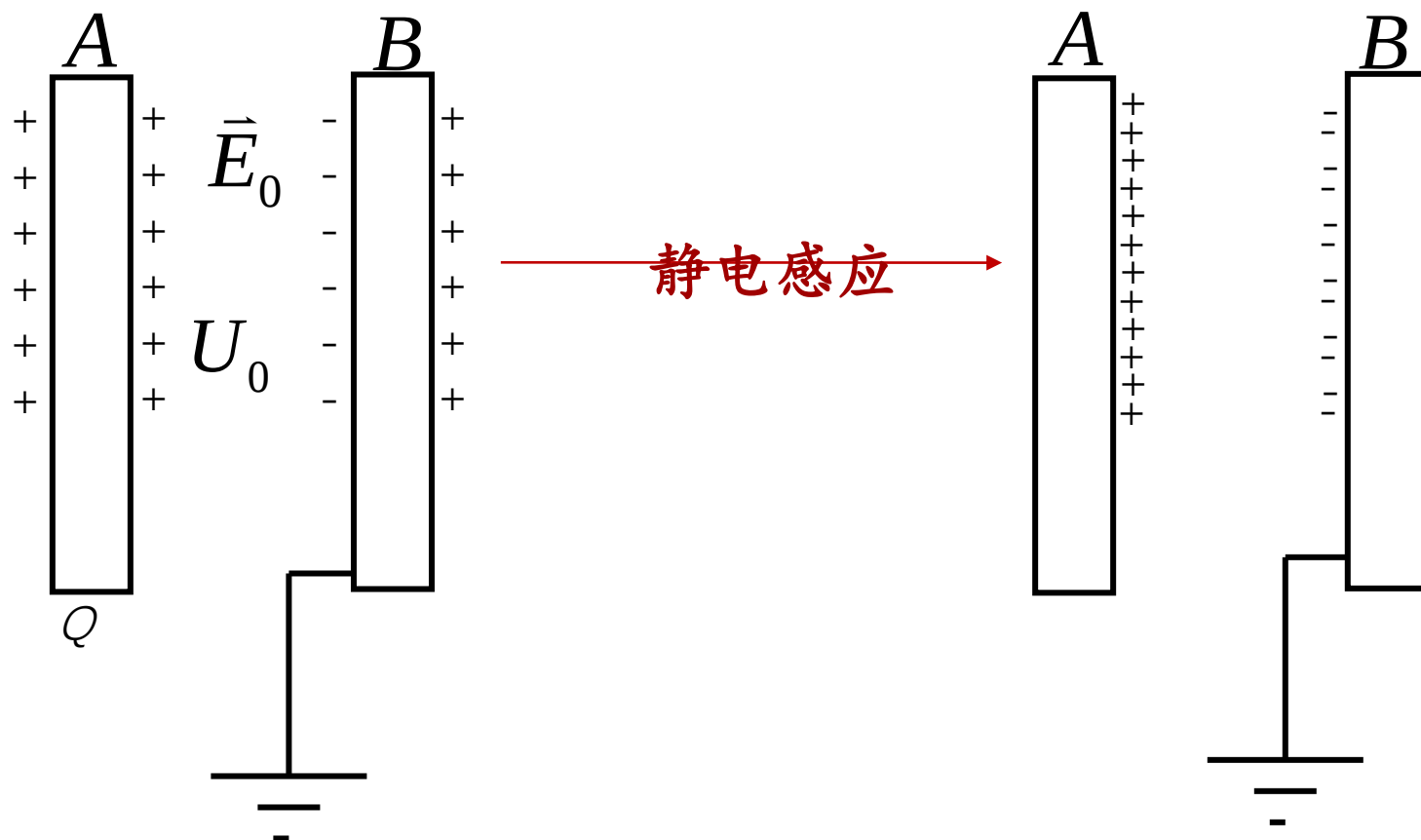




2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例22. 一大导体板A面积 S ，带电 Q ，另一同样大的不带电导体板B，两板平行放置，若将B接地，求：两导体板所带电荷、两板间电场强度和电势差变成多少？

板书讲解





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例23. 电场强度与电势之间微分关系的推导

求 $A \rightarrow B$ 的电势差:

$$\begin{aligned} -\Delta U &= \vec{E} \cdot \Delta \vec{l} \\ &= \underline{E \cos \theta} \Delta l \end{aligned}$$

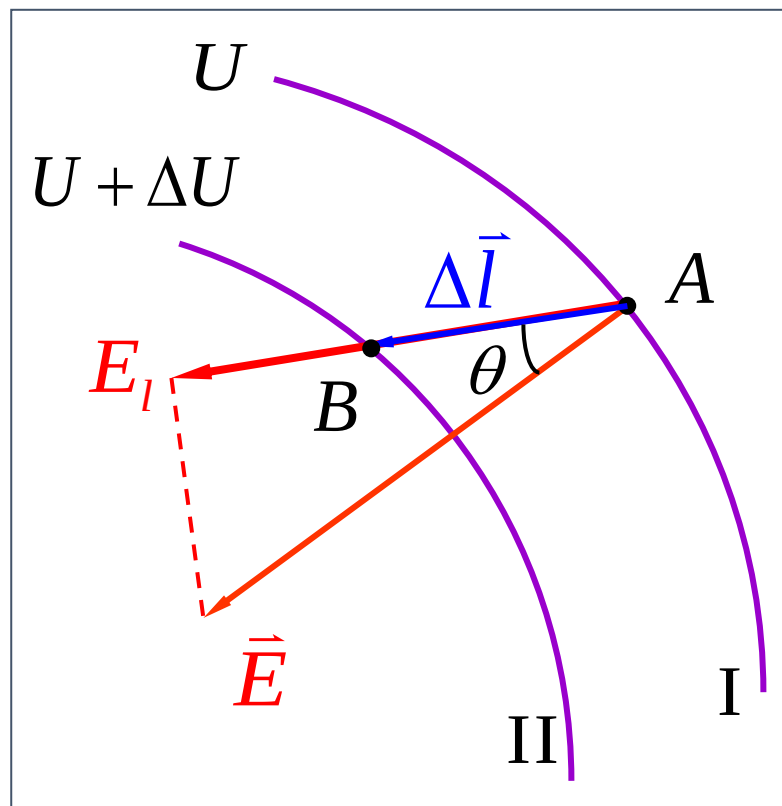
$$\Rightarrow E_l = -\frac{\Delta U}{\Delta l}$$

电场强度在 $\Delta \vec{l}$ 方向的投影

取极限:

$$E_l = -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = -\frac{dU}{dl}$$

这是什么?





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例23. 电场强度与电势之间微分关系的推导

$$E_l = -\frac{dU}{dl}$$

电场中某一点的电场强度沿任一方向的分量，等于这一点的**电势沿该方向单位长度上电势变化率**的负值。

在垂直于等势面方向： $E_n = -\frac{dU}{dl_n}$

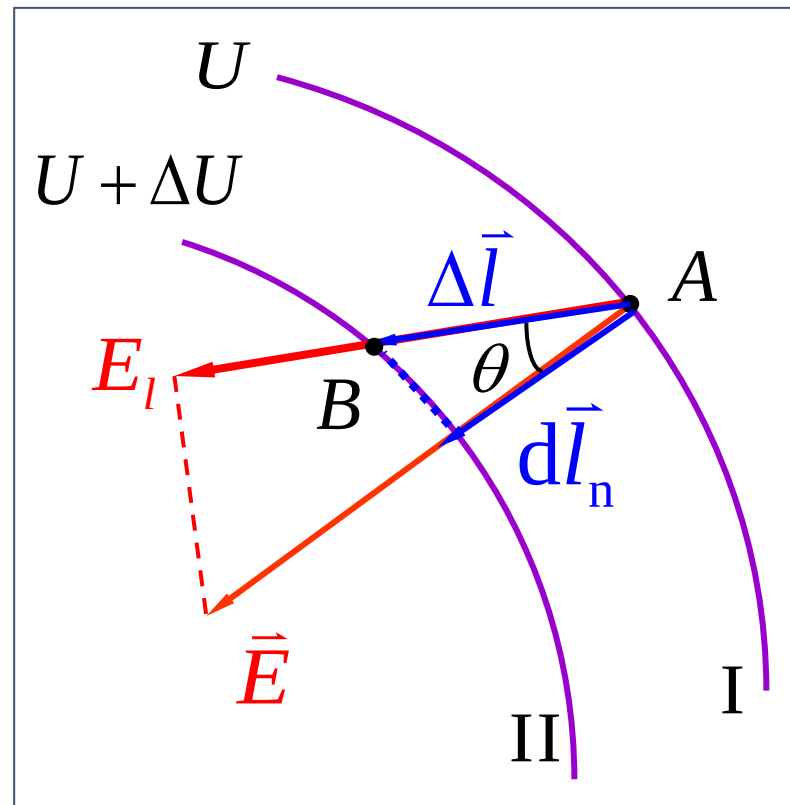
$$dl > dl_n \longrightarrow E_n > E_l$$

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dl_n} \vec{e}_n$$

- 大小： $|\vec{E}| = \left| \frac{dU}{dl_n} \right|$

- 方向：由高电势处指向低电势处

数学上，矢量 $\vec{E}(x, y, z)$ 与标量函数 $U(x, y, z)$ 的**梯度**有关。



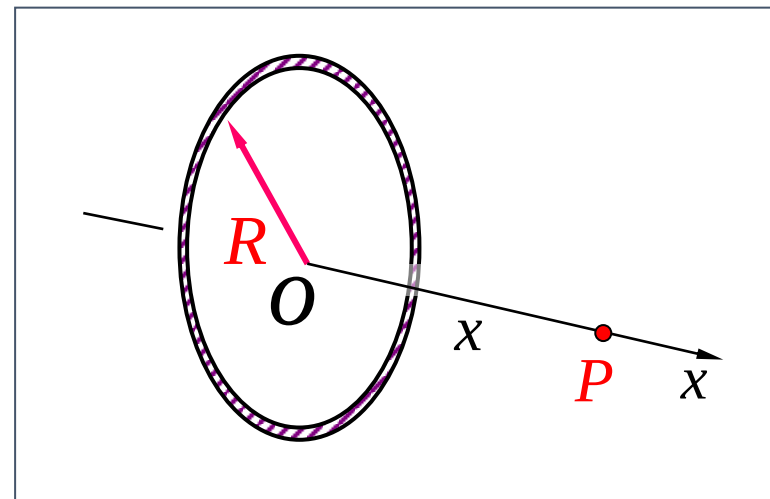


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例24. 在正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上. 利用电场强度与电势的关系, 求均匀带电细圆环轴线上一一点 P 的电场强度.

解:
$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}.$$

$$\begin{aligned} E = E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$



请比较与库仑定律得到的结论**是否一致?**



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

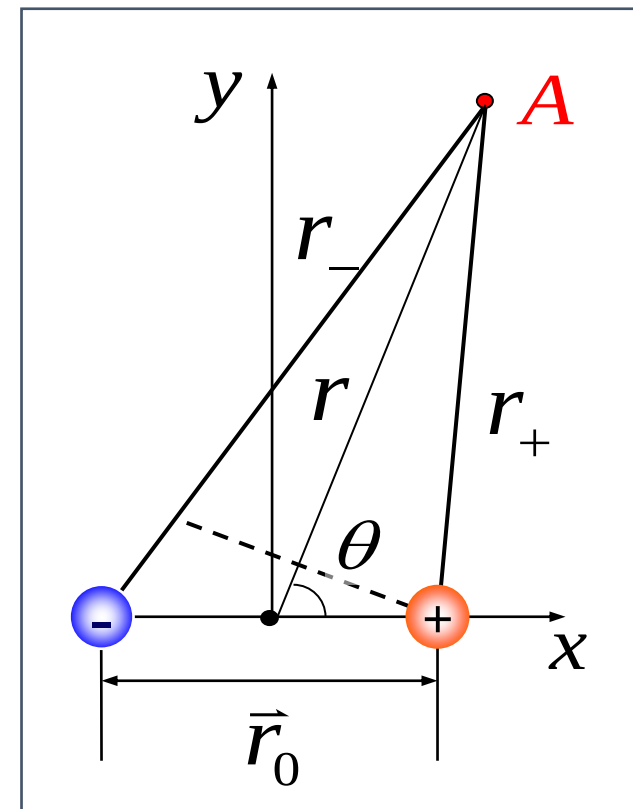
例25. 求电偶极子电场中任意一点A的电势和电场强度. ($r_0 \ll r$)

解:

$$U_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+} \quad U_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-}$$
$$U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

$r_- - r_+ \rightarrow r_0 \cos \theta$
 $r_+ r_- \rightarrow r^2$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 \cos \theta}{r^2}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$





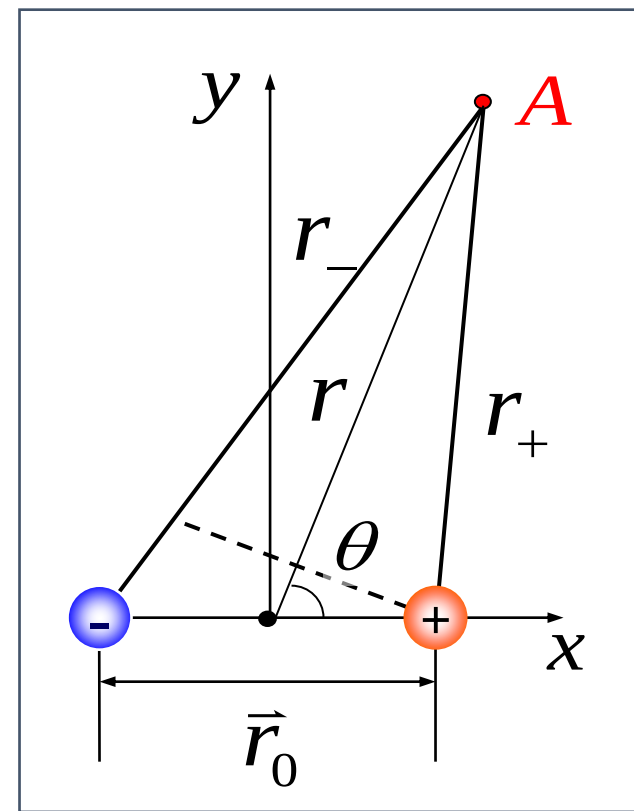
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例25. 求电偶极子电场中任意一点A的电势和电场强度. ($r_0 \ll r$)

讨论1:

$$U \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0, & U \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2}. \\ \theta = \pi, & U \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2}. \\ \theta = \frac{\pi}{2}, & U = 0. \end{array} \right.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例25. 求电偶极子电场中任意一点A的电势和电场强度. ($r_0 \ll r$)

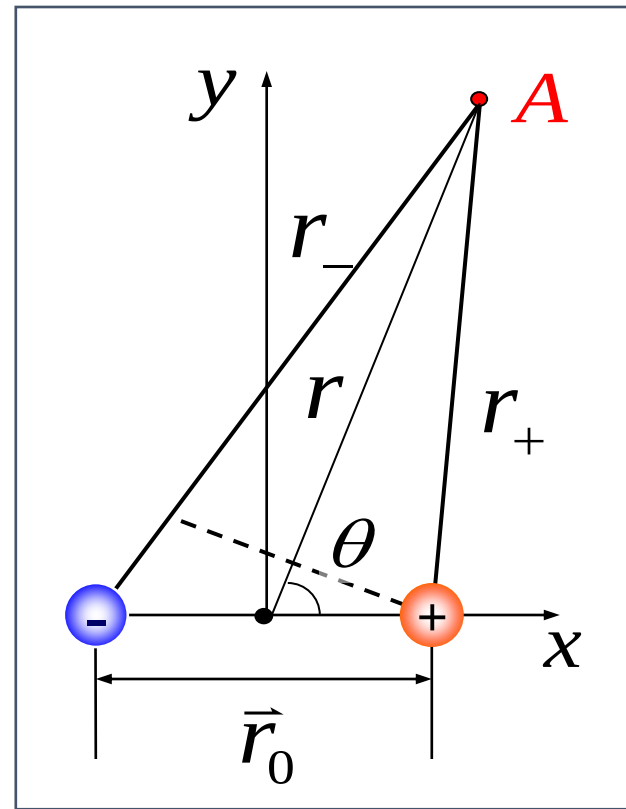
讨论2:

$$U \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^2}.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例25. 求电偶极子电场中任意一点A的电势和电场强度. ($r_0 \ll r$)

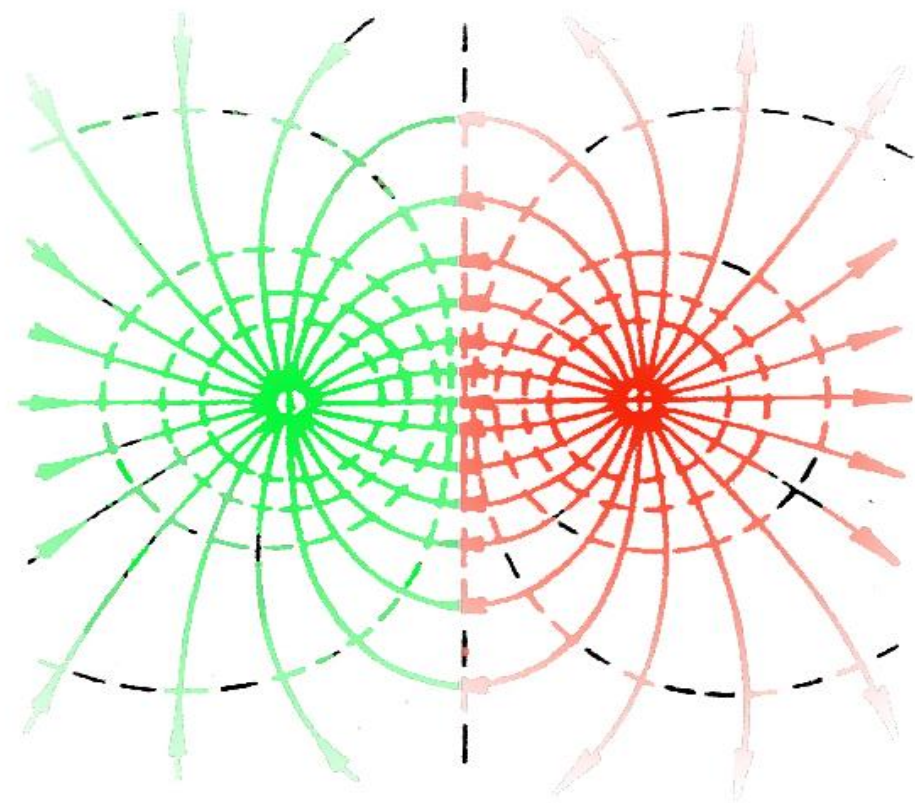
讨论3:

$$E_x = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

中垂线上: $x = 0 \rightarrow E = E_x = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3}.$

延长线上: $y = 0 \rightarrow E = E_x = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3}.$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例26. 电介质极化的物理图像

• 极化电荷/束缚电荷

过程再现:

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

$$E' = \frac{\sigma' / \epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{P / \epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi_e E}{\epsilon_0}.$$

$$E = \frac{E_0 - E'}{\epsilon_0} = \frac{(\sigma_0 - \sigma') / \epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{E_0 - \chi_e E}{\epsilon_0} \\ = \frac{E_0 / (1 + \chi_e)}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon_r}.$$

板书推导:

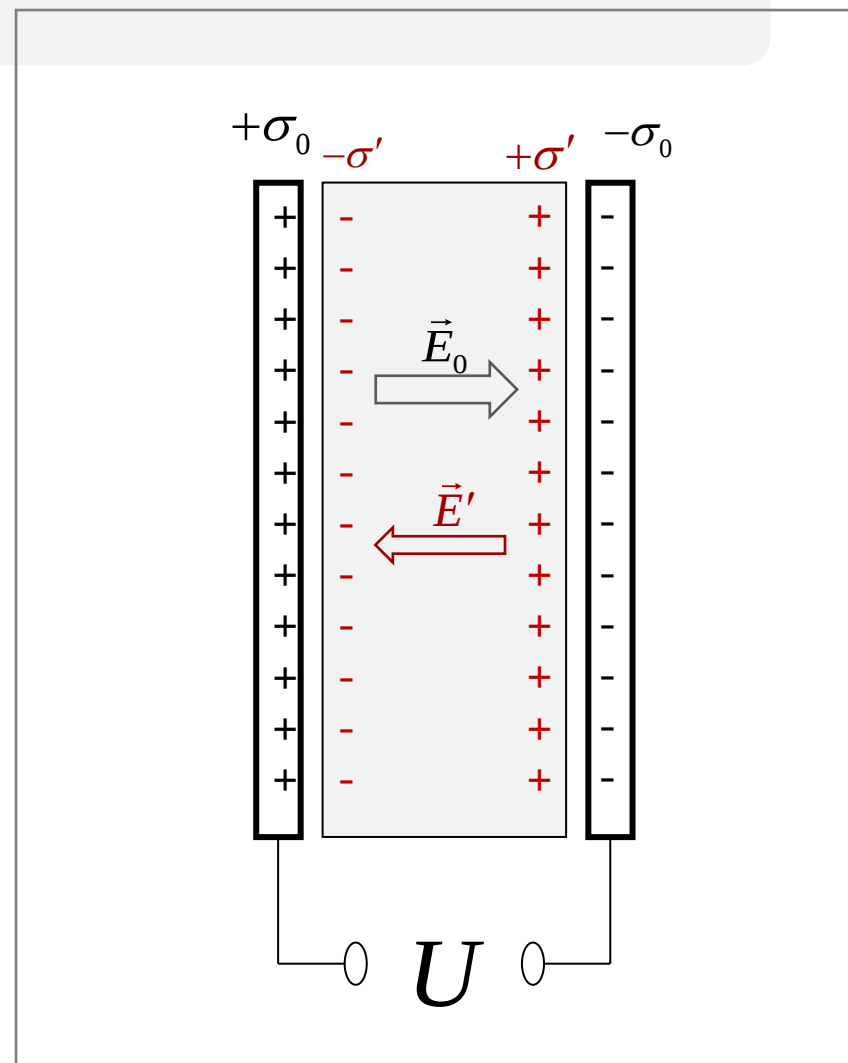
$$\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_0.$$

$$Q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q_0.$$

$$P = \sigma'.$$

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}.$$

电极化率





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例26. 电介质极化的物理图像

板书推导1:

$$P = \frac{\sum p_i}{\Delta l \Delta S} = \frac{\sum q'_i \Delta l}{\Delta l \Delta S} = \frac{q'}{\Delta S} = \sigma'$$

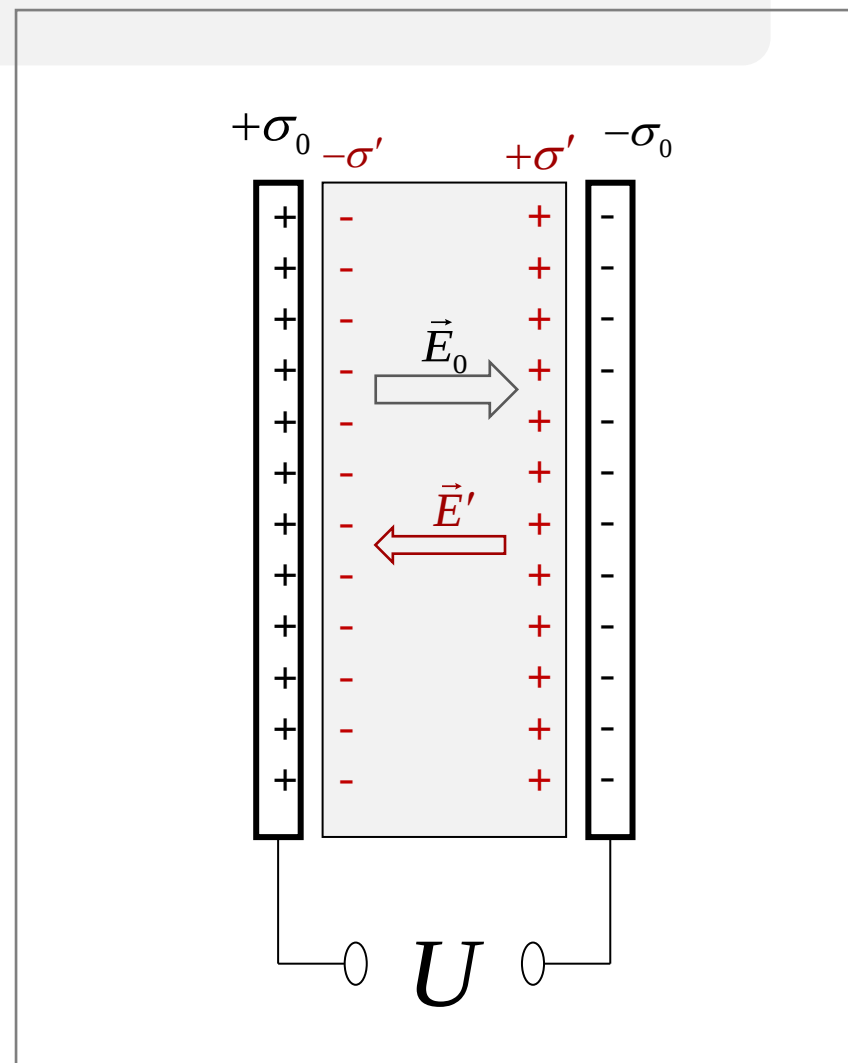
板书推导2:

$$E' = \sigma' / \varepsilon_0 \quad E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0$$

$$\rightarrow E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_0$$

$$\rightarrow Q' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) Q_0$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例27. 把一块相对电容率 $\varepsilon_r = 3$ 的电介质，放在相距 $d = 1 \text{ mm}$ 的两平行带电平板之间。放入之前，两板的电势差是 $1\,000 \text{ V}$ 。试求两板间电介质内的电场强度 E 、电极化强度 P 、板和电介质的电荷面密度、电介质内的电位移 D 。

解： $E_0 = \frac{U}{d} = 10^3 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}.$

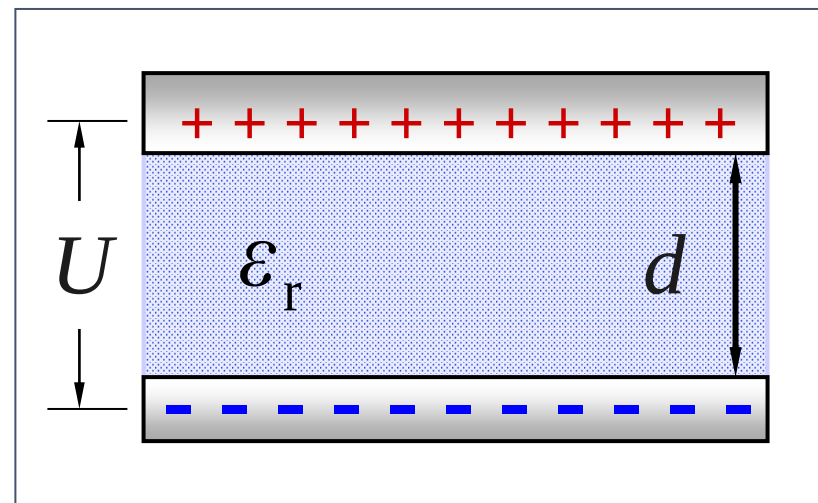
$$E = E_0 / \varepsilon_r = 3.33 \times 10^2 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = 5.89 \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}.$$

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0 = 8.85 \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}.$$

$$\sigma' = P = 5.89 \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}.$$

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon_0 E_0 = \sigma_0 = 8.85 \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例28. 把如图所示由半径为 R_1 的长直圆柱导体和同轴的半径为 R_2 的薄导体圆筒组成，其间充以相对电容率为 ϵ_r 的电介质。设长直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 。求：

- (1) 电介质中的电场强度、电位移和极化强度；
- (2) 电介质内外表面的极化电荷面密度。

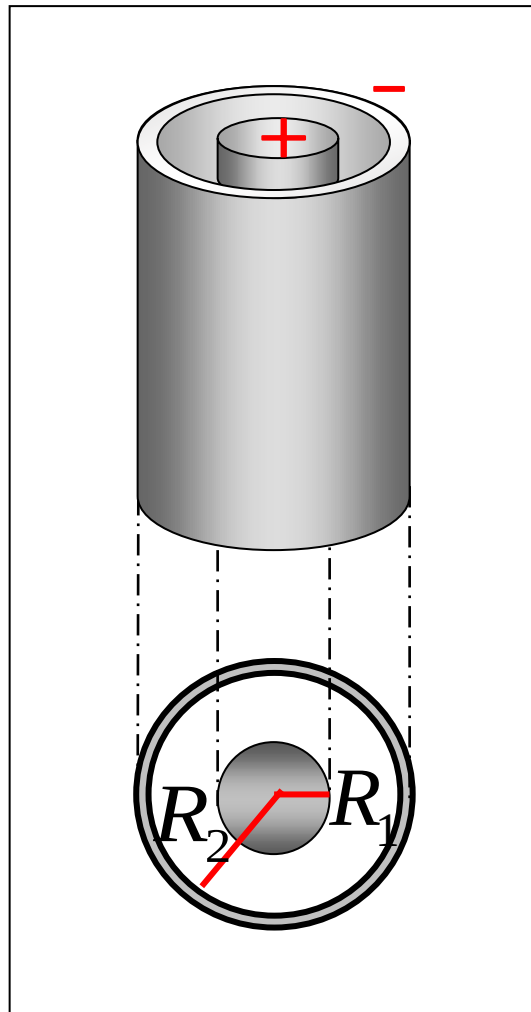
解： **板书推导：**

$$(R_1 < r < R_2)$$

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}, \quad P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E = \frac{\epsilon_r - 1}{2\pi \epsilon_r} \lambda.$$

$$\sigma'_1 = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_1 = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi \epsilon_r R_1}, \quad \text{at } r = R_1.$$

$$\sigma'_2 = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_2 = \frac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi \epsilon_r R_2}, \quad \text{at } r = R_2.$$



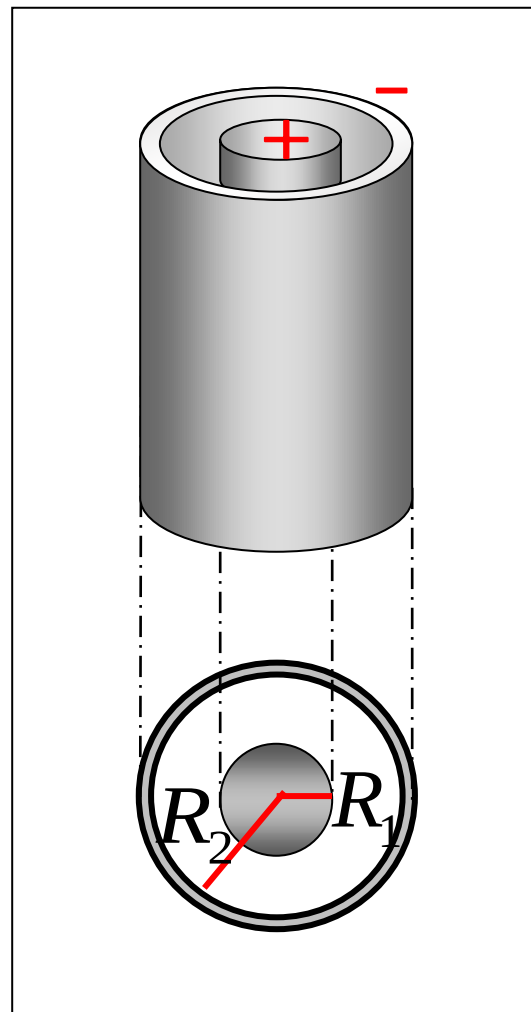
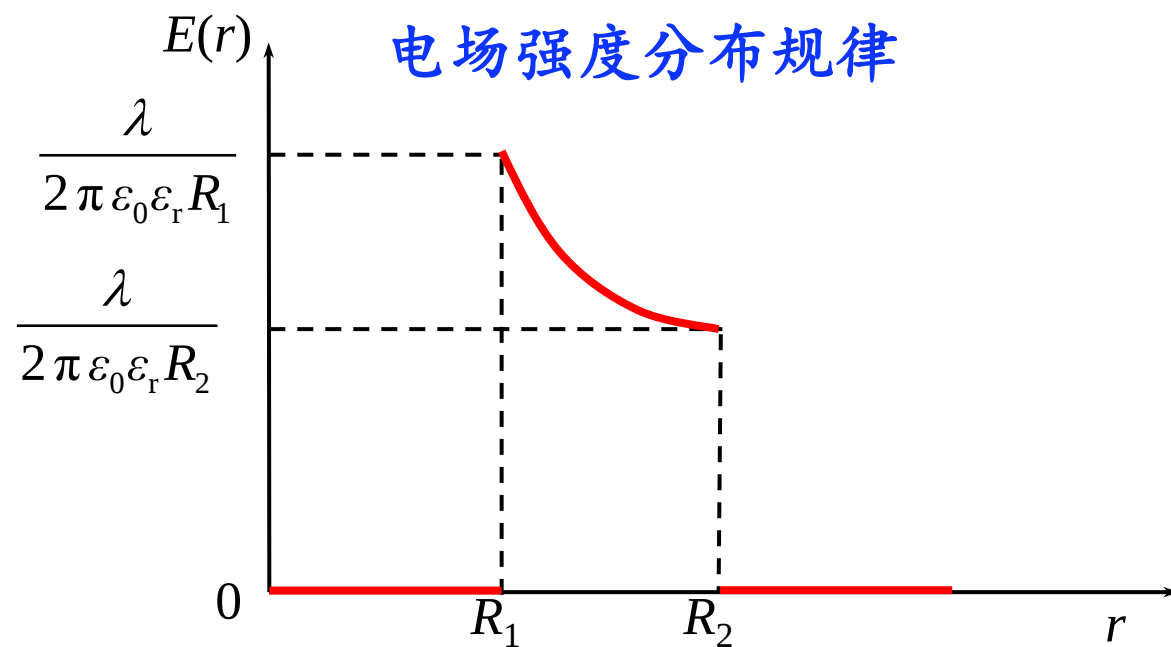


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例28. 把如图所示由半径为 R_1 的长直圆柱导体和同轴的半径为 R_2 的薄导体圆筒组成，其间充以相对电容率为 ϵ_r 的电介质。设长直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 。求：

- (1) 电介质中的电场强度、电位移和极化强度；
- (2) 电介质内外表面的极化电荷面密度。

解：





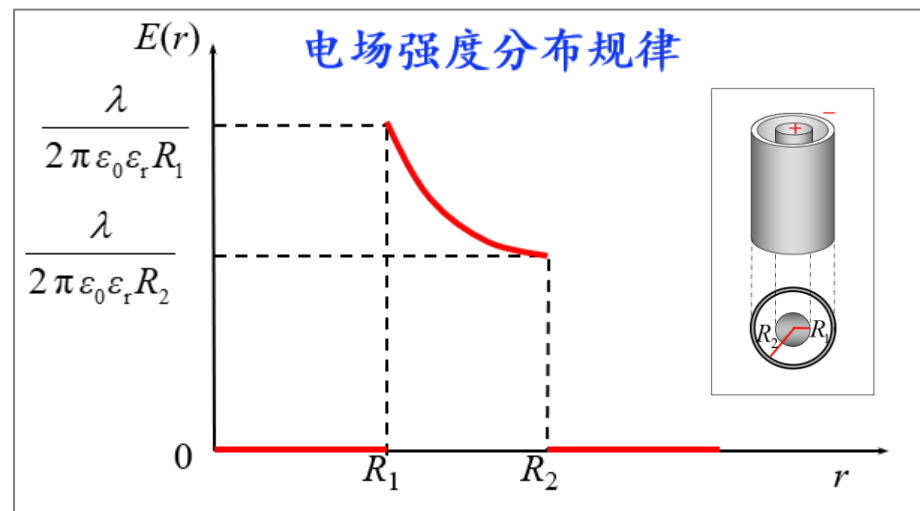
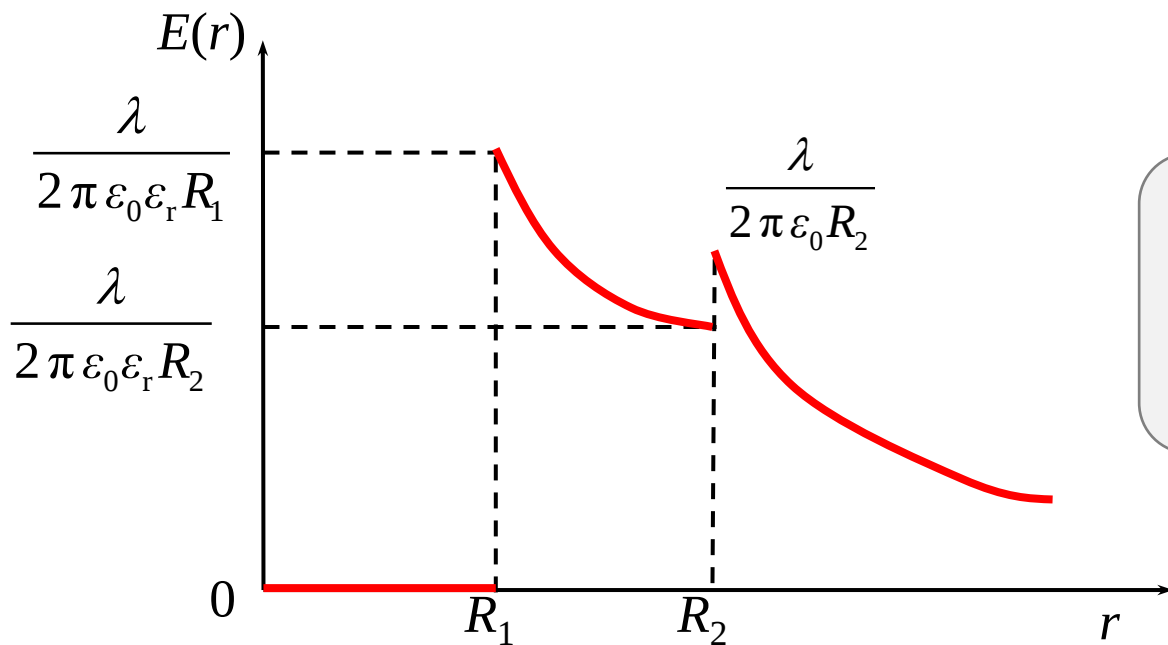
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

讨论1: 若 $R_1 \sim R_2 \rightarrow R$

匀强电场

$$E \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$$

讨论2: 若外圆筒不带电, 求电场分布规律?



- 电场强度 $E(r)$ 在 R_1 和 R_2 发生突变;
- 电位移 $D(r)$ 在 R_1 突变, 在 R_2 连续.



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例29. 随堂例题 @ 2024 春季学期

1. 真空中两个金属平板，分别带电量为 $+Q$ 和 $-Q$ ，平板的面积为 S ，相距为 d ，请充分讨论两个平板之间的相互作用力。
2. 真空中两个金属平板，分别带电量为 Q_1 和 Q_2 ，平板的面积为 S ，相距为 d ，请充分讨论两个平板之间的相互作用力。
3. 真空中两个金属平板，分别不带电，平板的面积为 S ，相距为 d ，请充分讨论两个平板之间的相互作用力（可讨论，可查阅网络资料）。



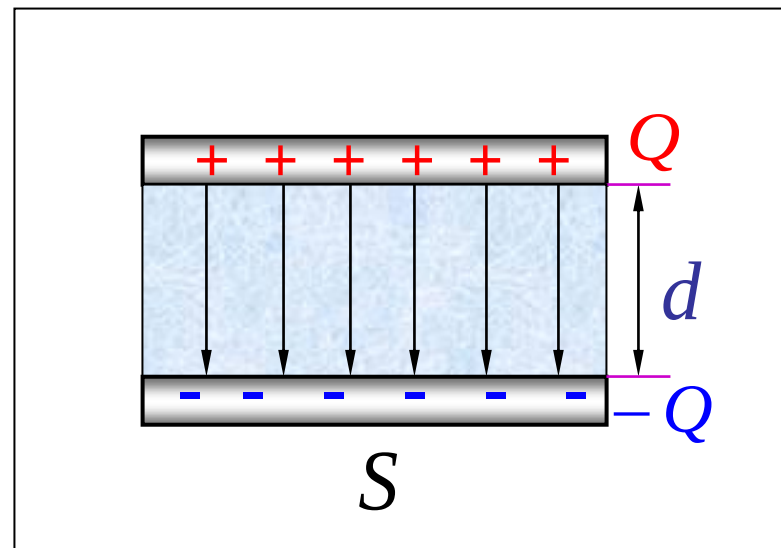
例30. 电容器的计算

- 平行平板电容器

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}.$$

$$\Delta U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}.$$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}.$$





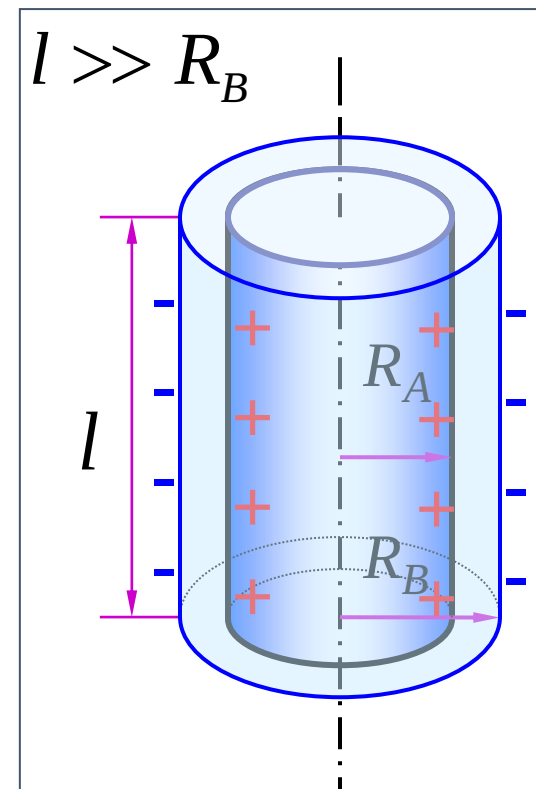
例30. 电容器的计算

- 圆柱形电容器

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_B / R_A)}.$$

讨论: $d = R_B - R_A \ll R_A$

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l R_A}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$



(过渡到平行板电容器)



例30. 电容器的计算

- 球形电容器

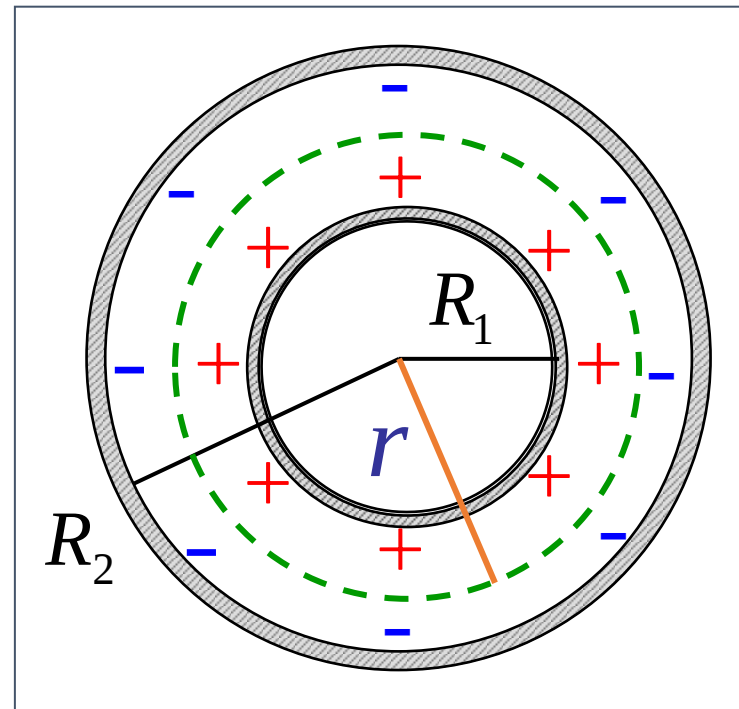
$$C = \frac{Q}{\Delta U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

讨论1: $R_2 \rightarrow \infty$ (过渡到孤立导体球)

讨论2: $d = R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$

$$C \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

(过渡到平行板电容器)





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

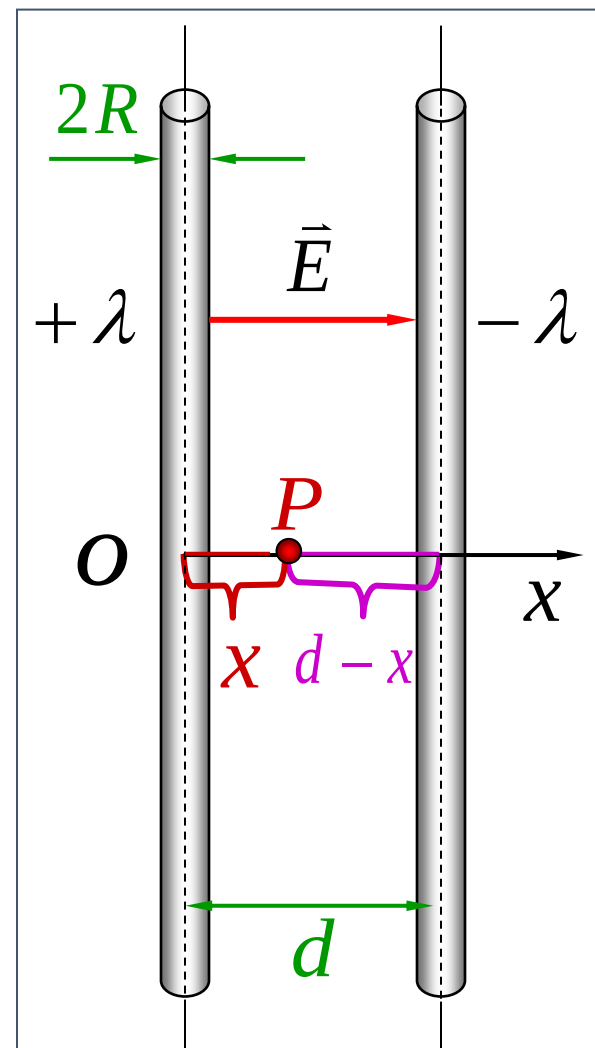
例30. 电容器的计算

- 两半径为 R 的平行长直导线，中心间距为 d ，且 $d \gg R$ ，求单位长度的电容。

板书推导：

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(d/R)}.$$

(请同学们**掌握**本题的处理方法)

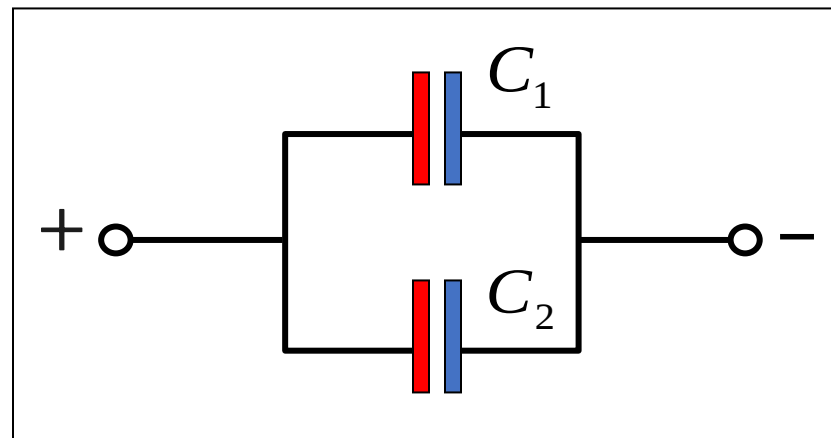




例31. 电容器的并联和串联问题

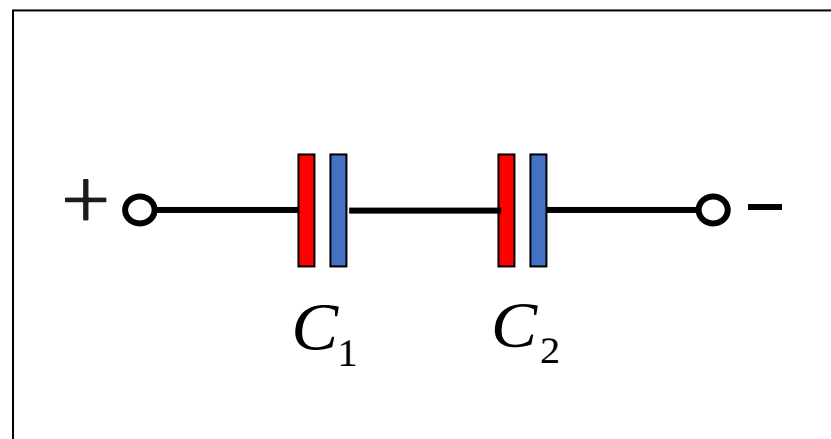
1 电容器的并联

$$C = C_1 + C_2.$$



2 电容器的串联

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$





例32. 电容器储能 & 静电场的能量

• 电容器的电能

每次移动电荷需要克服电场力作功：

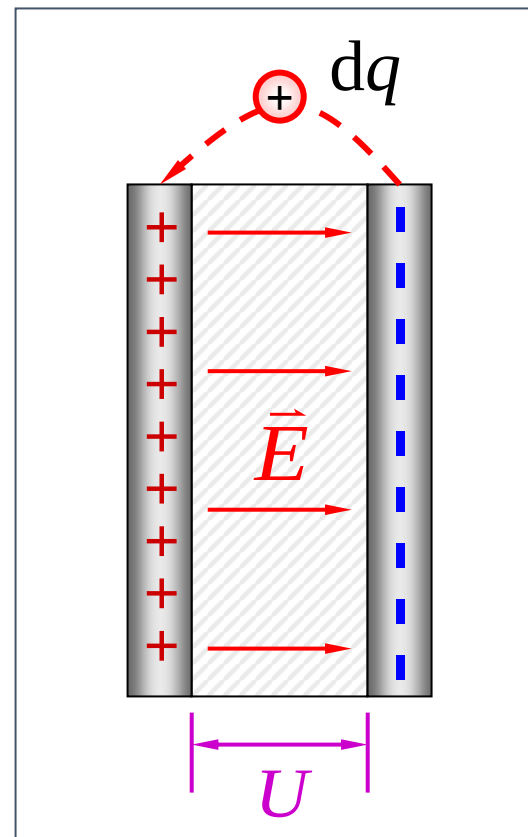
$$dW = Udq = \frac{q}{C} dq.$$

让电容器正负极分别带 $\pm Q$ 需要作功：

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

电容器储存的电能为：

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例32. 电容器储能 & 静电场的能量

• 静电场的能量

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2.$$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} (Ed)^2$$

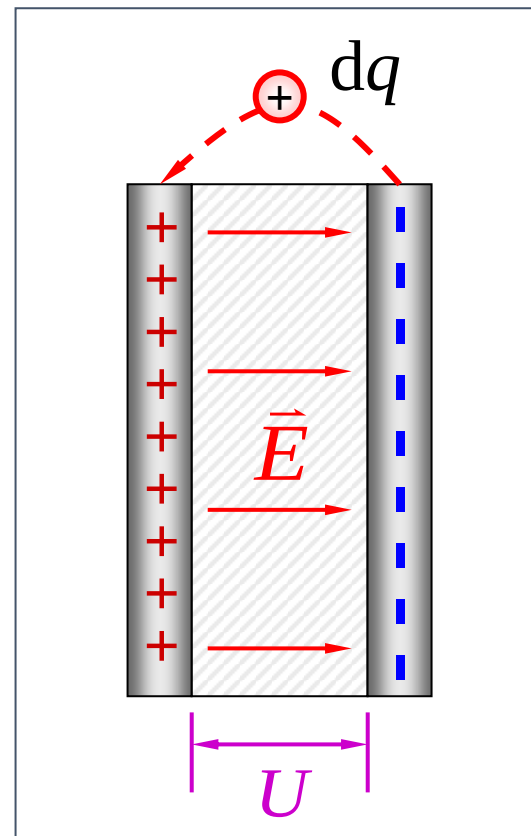
静电场的能量密度

$$= \boxed{\frac{1}{2} \epsilon E^2} Sd$$

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

静电场中单位体积内存储的能量。

(单位: $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$)



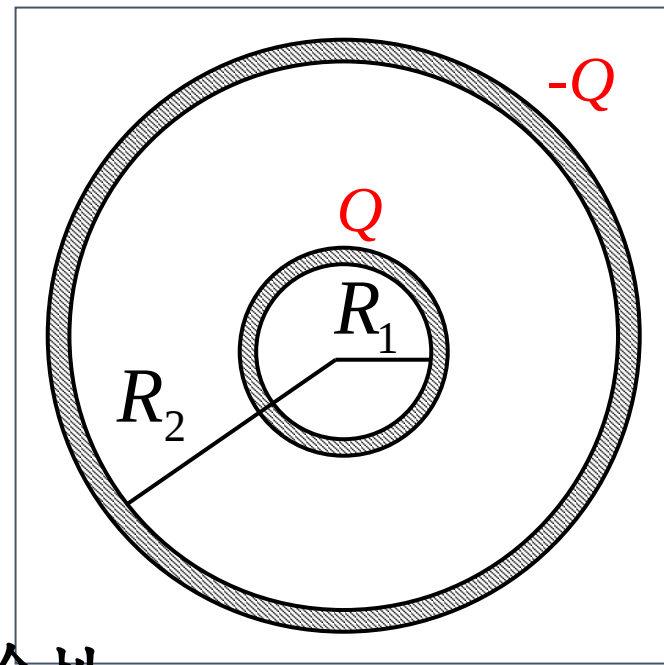


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例33. 如图所示,球形电容器的内、外半径分别为 R_1 和 R_2 ,所带电荷为 $\pm Q$. 若在两球壳间充以电容率为 ε 的电介质,问此电容器贮存的电场能量为多少?

板书推导:

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$



讨论1: 理解电容器储能与静电场能量之间的等价性。

讨论2: $R_2 \rightarrow \infty$ (过渡到孤立导体球)

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_1}.$$



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例34. 圆柱形空气电容器中空气的击穿场强是 $3 \text{ KV} \cdot \text{mm}^{-1}$, 设导体圆筒的外半径 $R_2 = 10^{-2} \text{ m}$. 在空气不被击穿的情况下长圆柱导体内半径 R_1 取多大可使电容器**贮存能量最多**?

电容器的优化设计问题

解:

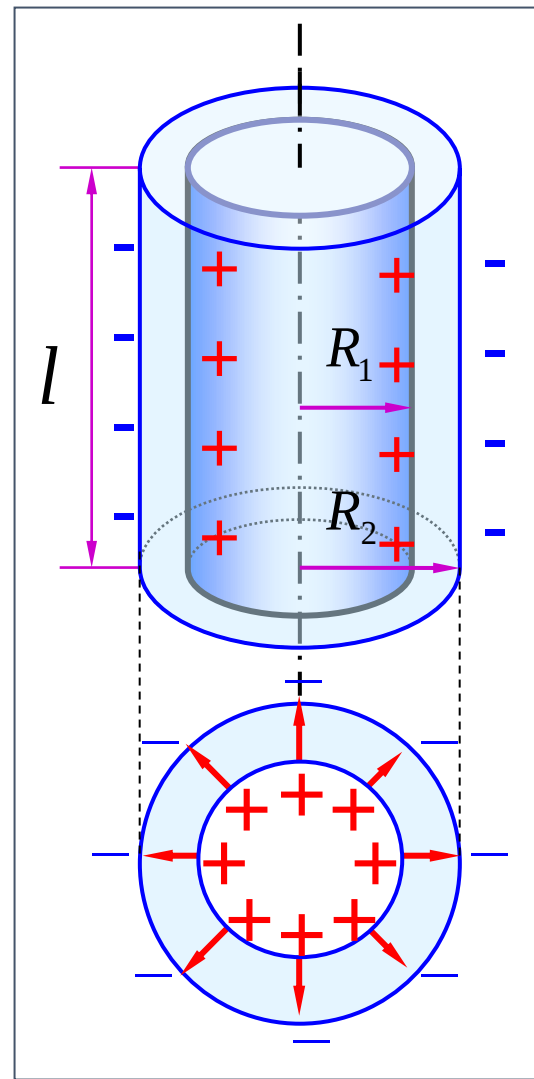
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

$$E_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1} < E_b = 3 \text{KV} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\Delta U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

单位长度内存储的能量:

$$W_e = \frac{1}{2} \lambda \Delta U = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

目标： R_1 取多大可使电容器贮存能量最多？

讨论： $E_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1} < E_b = 3\text{KV} \cdot \text{mm}^{-1}$.

$$W_e = \frac{1}{2} \lambda \Delta U = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$W_e^{\max} = \frac{(2\pi\epsilon_0 R_1 E_b)^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \pi\epsilon_0 R_1^2 E_b^2 \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

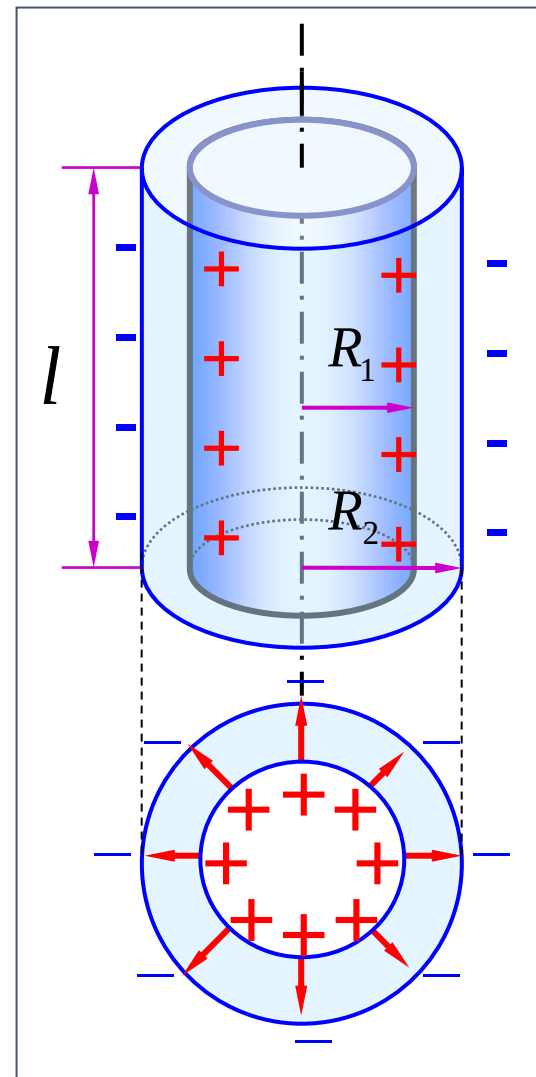
极大值条件：

$$\frac{dW_e}{dR_1} = \pi\epsilon_0 E_b^2 R_1 (2 \ln \frac{R_2}{R_1} - 1) = 0.$$

$$R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}} \approx 6.07 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

$$U_{\max} = E_b R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{E_b R_2}{2\sqrt{e}} = 9.10 \times 10^3 \text{ V}.$$

给出了最优化的几何结构，及其对应的耐压值。





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例35. 学生答疑 @ 2025春

2. 一导体球外充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质，若测得导体表面附近电场强度为 E ，则导体球面上的自由电荷面密度 σ 为

- (A) $\epsilon_0 E$ (B) $\epsilon_0 \epsilon_r E$ (C) $\epsilon_r E$ (D) $(\epsilon_0 \epsilon_r - \epsilon_0) E$

B [D]

202 20:09:21

老师我想问一下第二题为什么不选d

ZKY 21:26:36

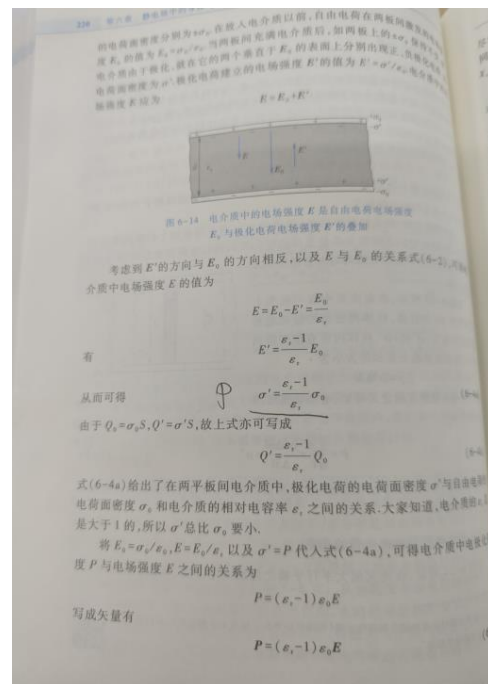
明天课堂我讲下。你可以说下为何选d

2 1:29:52

我是看的这页教材😂

ZKY 21:31:30

你不用说你看的是哪儿，我更关心你咋想的





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例35. 学生答疑 @ 2025春

2025/5/18 12:19:01

老师这题我不太明白🙄

2025/5/18 12:19:17

在四个层面上的感应电荷都是怎么分布的啊🙄

ZKY 2025/5/18 12:45:54

好问题，你可以说说你的思路，我针对性帮你处理

2025/5/18 12:49:14

老师，我就感觉它里面那个电荷不是在球壳的中心，然后内球壳的内表面肯定是不均匀的

2025/5/18 12:49:32

然后外表面怎么静电感应，我就不太知道了🙄

2025/5/18 12:50:46

这个应该是等势体啊

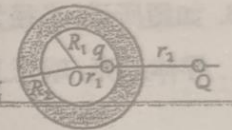
ZKY 2025/5/18 15:02:44

你可以做个类比

ZKY 2025/5/18 15:03:19

如果不考虑内侧电荷，只考虑外侧的均匀球带电分布是怎样的呢？

6. 如图所示，两个不带电的同心导体球壳，两球壳之间填以相对电容率为 ϵ_r 的介质，在内球壳偏心的位置放置一个固定的点电荷 q ，其到球心的距离为 r_1 ，在两球壳外也放置一个点电荷 Q ，到球心的距离为 r_2 ，且 O, q 和 Q 在同一条直线上。下列叙述中，正确的是



第6题图

(A) 两球壳四个层面上的感应电荷均匀分布，外球壳外表面感应电荷对 q 的作用力为零

(B) 两球壳四个层面上的感应电荷不均匀分布，外球壳外表面感应电荷对 q 的作用力为零

(C) 两球壳四个层面上的感应电荷均匀分布，外球壳外表面感应电荷对 q 的作用力不为零

(D) 两球壳四个层面上感应电荷不均匀分布，外球壳外表面感应电荷对 q 的作用力不为零

2025/5/18 23:35:57

那应该都是不均匀的吧老师

2025/5/18 23:36:35

外球壳外表面离 Q 近一侧是负 Q 另一侧 Q



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例35. 学生答疑 @ 2025春

$\mathcal{E}$
 $U: 0 \sim \mathcal{E}$
 $i(t): 0 \sim 0$
 $q(t): 0 \sim Q$

设 t 时刻, 极板间电势差为 $U(t)$.
 电荷 $q(t) =$
 在 $t+dt$ 时刻 $q \rightarrow q+dq$ 电源克服
 电源做功: $dW = dq \cdot U$ 的结果
 $= \frac{1}{C} q \cdot dq$ 为什
 在两极板间...
 则 $W_{\text{总}} = \int dW = \int_0^Q \frac{1}{C} q \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$
 电容器储存的电能 $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 \rightarrow$ 静电场
 有储在体积为 $S \cdot d$ 的空间 (电场存在的空间) 的总能

ZKY 2025/5/16 17:42:35

- 1 理想情况下, 电动势 ϵ 等于 u
- 2 电源内部电势和电动势的概念, 等我讲到的时候再给你们讲

ZKY 2025/5/16 17:43:06

你感兴趣可以看看电动势的那部分知识图谱和视频

2025/5/16 17:45:55

ZKY 2025/5/16 17:42:35

- 1 理想情况下, 电动势 ϵ 等于 u
- 2 电源内部电势和电动势的概念, 等我讲到的时候再给你们讲

对于 1 那个电源做功元功的推导部分, 电源做功是 $u \cdot dq$, 这里的 u 是两极板的变化中的 u , 不是 ϵ 啊, 这是为什么

2025/5/16 17:40:15

周老师您好, 我对于电容器的电能电源做功那一块有一些疑问, 1 电源克服电场力做功指的是两极板间的电场力吗? 电源电动势搬电荷和两极板搬电荷应该是不一样的啊 一个是 ϵ , 一个是 u 2 电源的电动势和两端电压 (电势差) 的区别, 应该和外部电路有关, 如果导线是理想导线, 那么电源正极和电容器正极板 (电源负极和电容器负极板) 的电势是不是看成时时刻刻相等的呢?

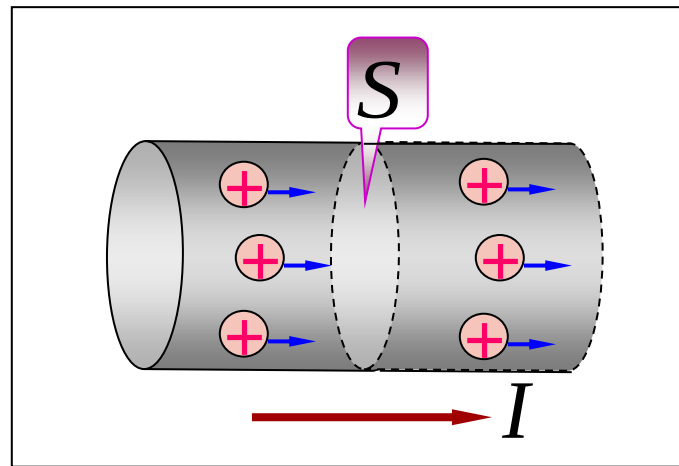


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例36. 电流强度的微观机制

• 电流强度

定义：单位时间内通过某一截面的电量称为通过该截面的**电流强度**，简称电流，用 I 表示。



板书推导

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = env_d dt S$$

单位体积内电荷数(载流子浓度)

- **规定：**正电荷**定向运动**的方向为电流的方向。

$$I = env_d S$$

- **单位：**安培 (A)

电荷漂移速度的大小

横截面积



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例36. 电流强度的微观机制

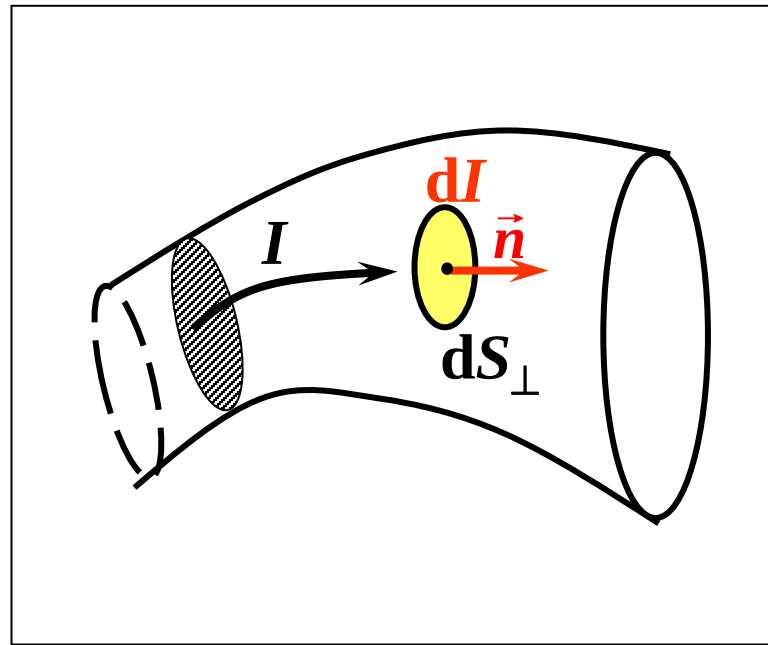
• 电流密度

定义：为细致描述导体内 **各点** 电流分布的情况，引入新的物理量——电流密度（**矢量**）。

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \vec{n}$$

- **方向：**该点正电荷定向移动的方向。
- **大小：**单位时间内过该点且垂直于正电荷运动方向的单位面积的电荷。
- **单位：** $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

电流密度矢量在空间形成“**电流场**”，可以用“**电流线**”形象地描述该矢量场。





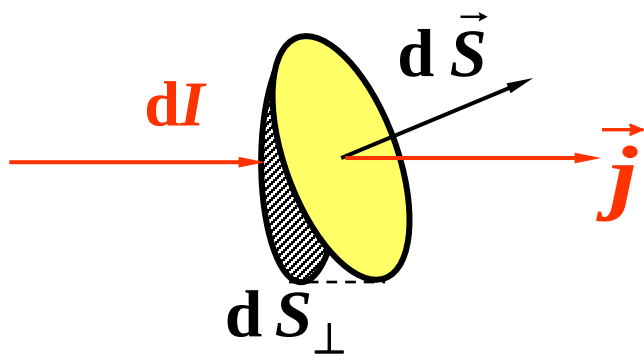
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例36. 电流强度的微观机制

- 电流密度

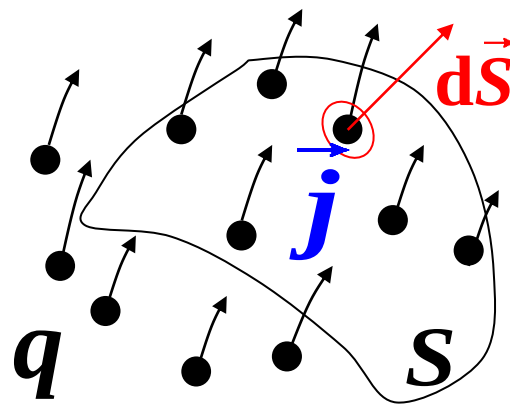
电流密度矢量在空间形成“**电流场**”，可以用“**电流线**”形象地描述该矢量场。

- 对任意面元:



$$dI = j dS_{\perp} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- 对曲面S:



$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例36. 电流强度的微观机制

• 恒定电流

- 根据电荷守恒定律，单位时间净流出任意封闭面的电量等于单位时间内封闭面内减少的电量，所以

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{\text{内}}}{dt} \quad \text{——电流的“连续性方程”}$$

- 恒定电流：如果导体内各处电流密度不随时间变化，则称为恒定电流。
- 恒定条件：如果任意闭合面内的电荷不随时间变化，则电流密度也不随时间变化。

$$\frac{dq_{\text{内}}}{dt} = 0. \quad \longleftrightarrow \quad \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

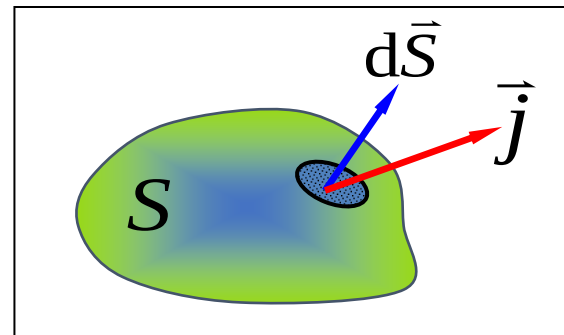


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例36. 电流强度的微观机制

- 恒定电场

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$



(1) 在恒定电流情况下，导体中电荷分布不随时间变化，形成**恒定电场**；

(2) 恒定电场**与静电场具有相似性质**（高斯定理和环路定理），恒定电场可引入电势的概念；

(3) 恒定电场的存在伴随**能量的转化**。



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例37. 已知铜摩尔质量为 $M=64 \text{ g/mol}$ ，密度 $\rho = 8.9 \text{ g/cm}^3$ ，若每个铜原子贡献一个电子，问铜导线中的载流子浓度多少？家用线路电流最大值 15 A ，铜导线半径 0.81 mm ，此时电子漂移速率多少？若假定导线中电流密度均匀分布，则电流密度多少？

解：(1)
$$n = \frac{N_A \rho}{M} = 8.48 \times 10^{28} \text{ 个/m}^3. \quad (\text{载流子浓度})$$

(2)
$$v_d = \frac{I}{nSe} = 5.36 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 2 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}. \quad (\text{非常缓慢, 为什么?})$$

(3)
$$j = \frac{I}{S} = 7.28 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

思考：电流密度与导线中的
恒定电场有怎样的关系？



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例38. 欧姆定律的微分形式

• 欧姆定律的微分形式

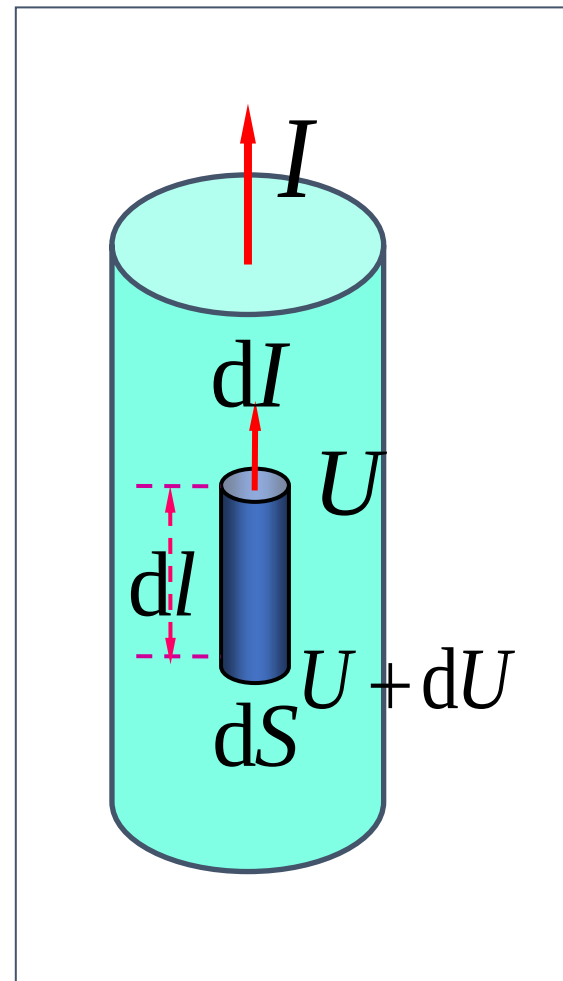
板书推导：

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

电导率

电阻率

一般金属或电解液，欧姆定律在相当大的电压范围内是成立的，但对于许多导体或半导体，欧姆定律不成立。这种**非欧姆导电特性**有很大的实际意义，在电子技术、计算机技术等现代技术中有重要作用。





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例39. 把大地看成均匀导电物质，其电导率为 σ ，一半径为 R 的球形电极，一半埋入大地中，忽略电极本身电阻。若雷电发生时，有 10^4 A 电流通过此电极进入大地。（1）求导体球的**接地电阻**；（2）求离电极**20 m**处的**跨步电压**？假设步长0.8 m，半径 $R = 20 \text{ cm}$ ，大地电导率 $\sigma = 10^{-2} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

板书推导：

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{2\pi r^2}.$$

$$R = \int dR = \int_R^\infty \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2\pi\sigma R} = 79.6 \Omega.$$

$$R_{\text{步}} = \frac{1}{2\pi\sigma r} - \frac{1}{2\pi\sigma(r+0.8)} = 0.0306 \Omega.$$

$$U_{\text{步}} = IR_{\text{步}} = 10^4 \times 0.0306 = 306 \text{ V}.$$



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例40. 电源&电动势的物理图像

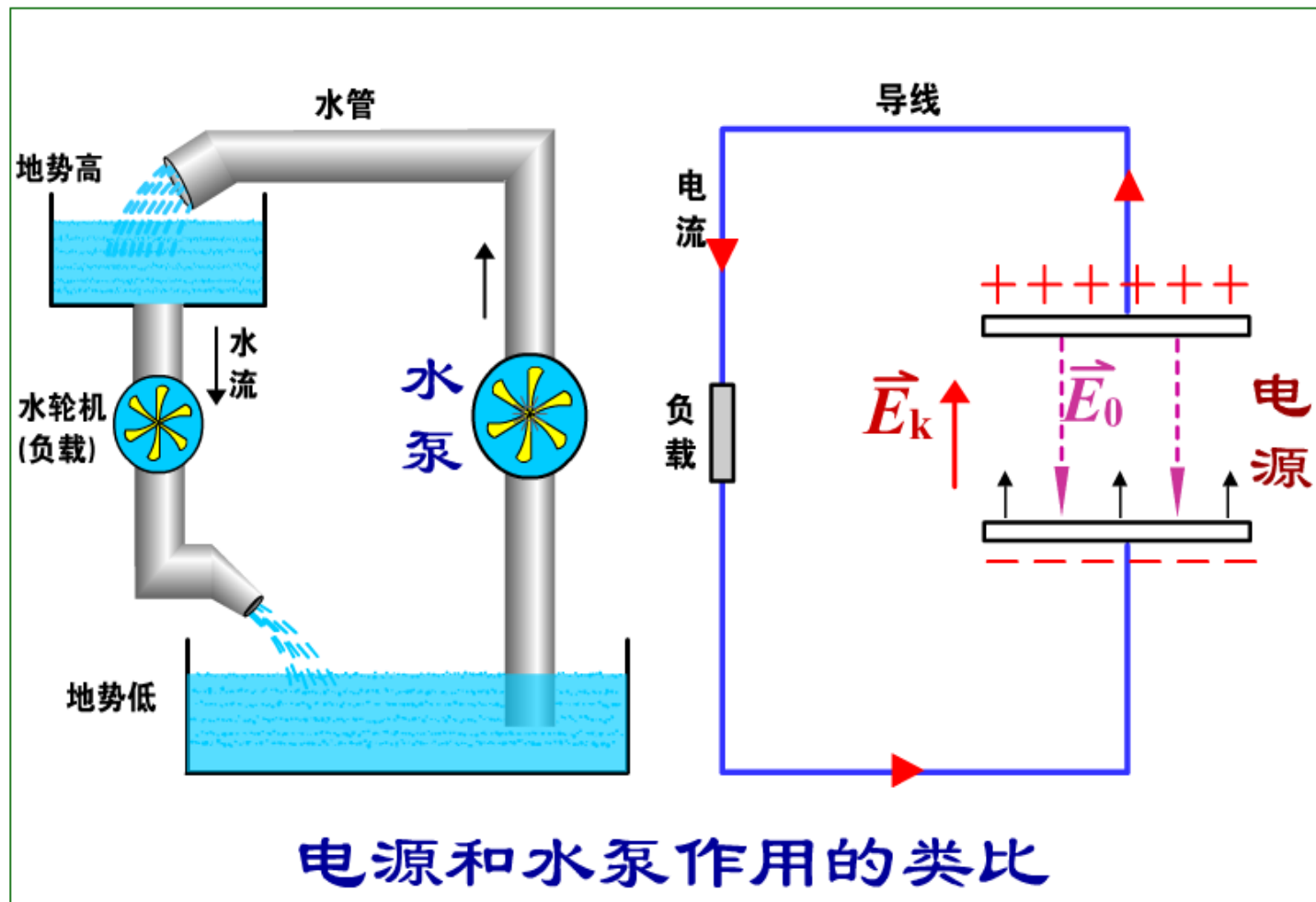
非静电力：能不断分离正负电荷使正电荷逆静电场力方向运动。

电源：提供非静电力的装置。

非静电**电场强度** $\vec{E}_k$ ：为单位正电荷所受的非静电力。

电动势的定义：单位正电荷绕闭合回路运动一周，非静电力所做的功。

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{\oint_l q \vec{E}_k \cdot d\vec{l}}{q} = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l}.$$



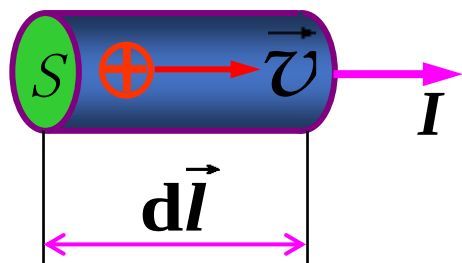
电动势反映了能源做功本领，是标量，单位：伏特。



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例41. 运动电荷产生的磁场

“电流元” $\longrightarrow$ “运动的电荷”
(不能单独存在) (可以单独存在)



电流强度的微观机制:

$$I = \frac{dq}{dt} = \dots = nqSv$$

$$\longrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqS\vec{v} \times \hat{e}_r}{r^2} (dl)$$

n —— 单位体积内载流子的个数

q —— 载流子的电量

$\vec{v}$ —— 载流子定向移动的速度

电流元中的总载流子数目: $dN = nS(dl)$

平均每个载流子激发的磁场:

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{e}_r}{r^2}$$

- 静止电荷 $\rightarrow$ 静电场 (库仑定律)
- 运动电荷 $\rightarrow$ 磁场 (毕 - 萨定律)

定量
描述



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例42. 求直线电流周围的磁场。

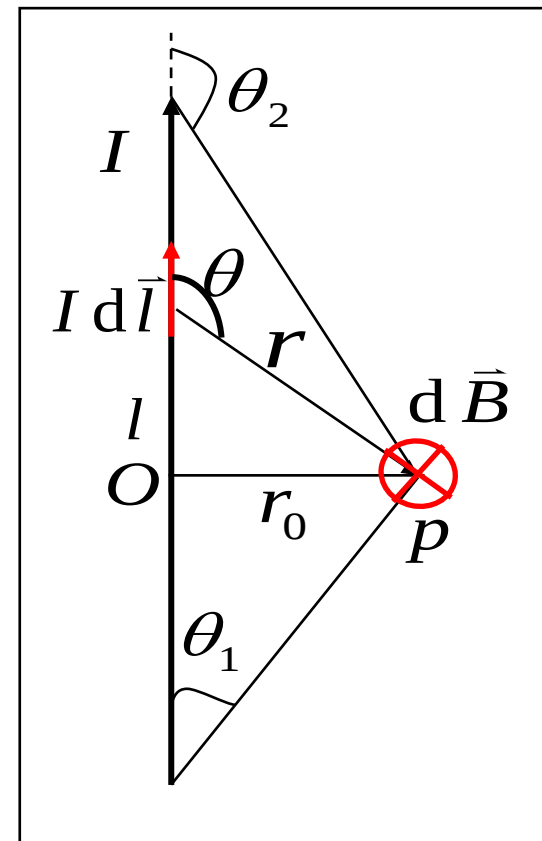
$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \theta}{r^2}.$$

$$dl = \frac{r_0}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$l = r_0 \operatorname{ctg}(\pi - \theta)$$

$$r = \frac{r_0}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{r_0}{\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r_0} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \end{aligned}$$



• 讨论1: 无限长直线电流周围的磁场?

• 讨论2: 半无限长直线电流周围的磁场?



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例43. 真空中半径为 R 的环形导线通有电流 I 。求其轴线上一点 P 的磁感强度的大小和方向。

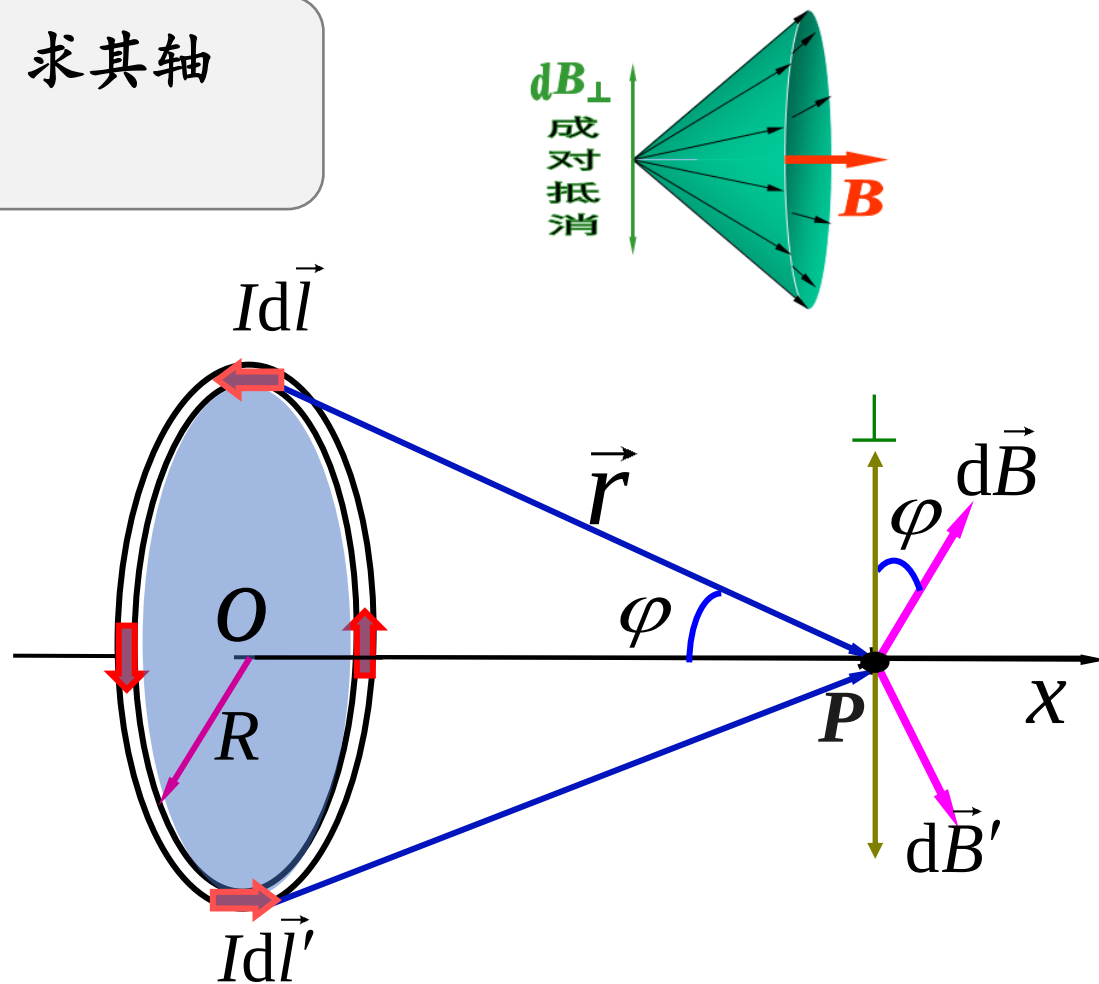
解： 在载流导线上取电流元 $Id\vec{l}$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin 90^\circ}{r^2}$$

从而， P 点的磁感应强度只有 x 方向分量，其大小

$$\begin{aligned} B &= \int dB_x = \int \sin\varphi dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\varphi \int dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\varphi \cdot 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{R}{r} \\ r &= \sqrt{R^2 + x^2} \end{aligned}$$



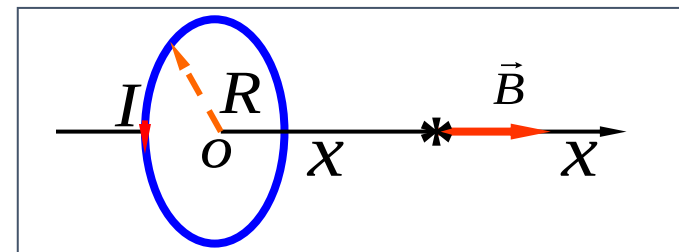
(方向：沿 x 轴正向)



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

【讨论】

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} \hat{e}_x = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} I \pi R^2 \hat{e}_x$$



定义 “磁矩”

磁矩方向与 I 成右手螺旋关系

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\hat{e}_x = I\pi R^2 \hat{e}_x$$

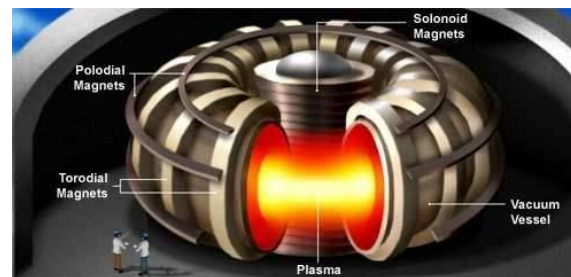
中轴线上的磁感应强度：

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} \vec{m}$$

当 $x \gg R$ 时，

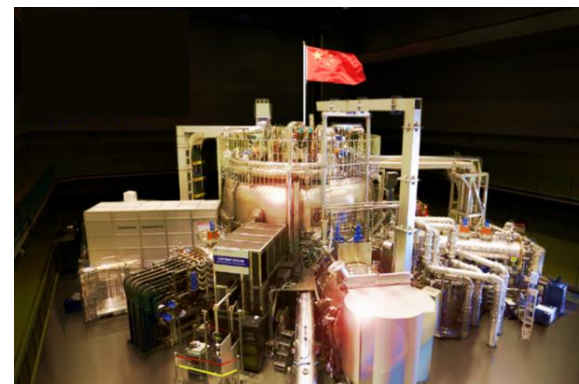
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi x^3} \vec{m}$$

引入“磁矩”，
为分析磁现象带来极大的方便



托卡马克装置

磁线圈环形真空室



中国的超导托卡马克
实验装置 (EAST)

世界领先

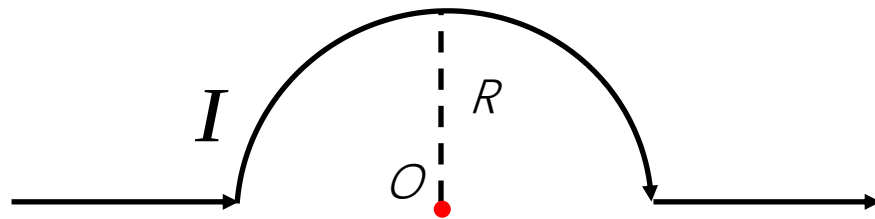


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例44. 已知电流分布如图，求O点处磁感应强度？

解：

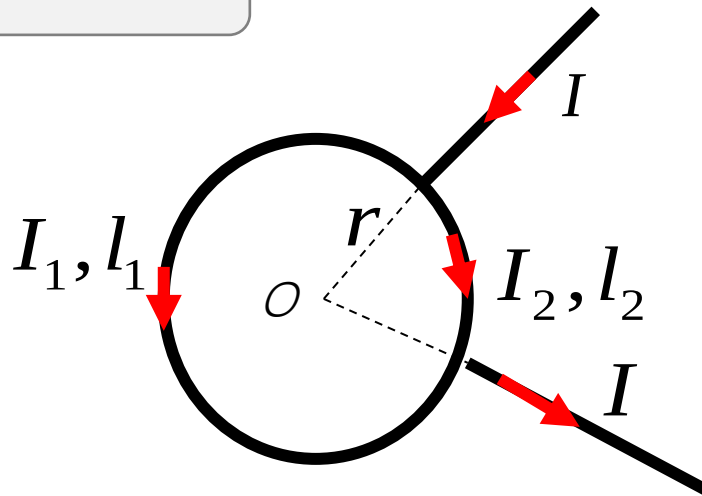
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$



例45. 已知电流分布如图，求O点处磁感应强度？

解：

$$B_0 = 0.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

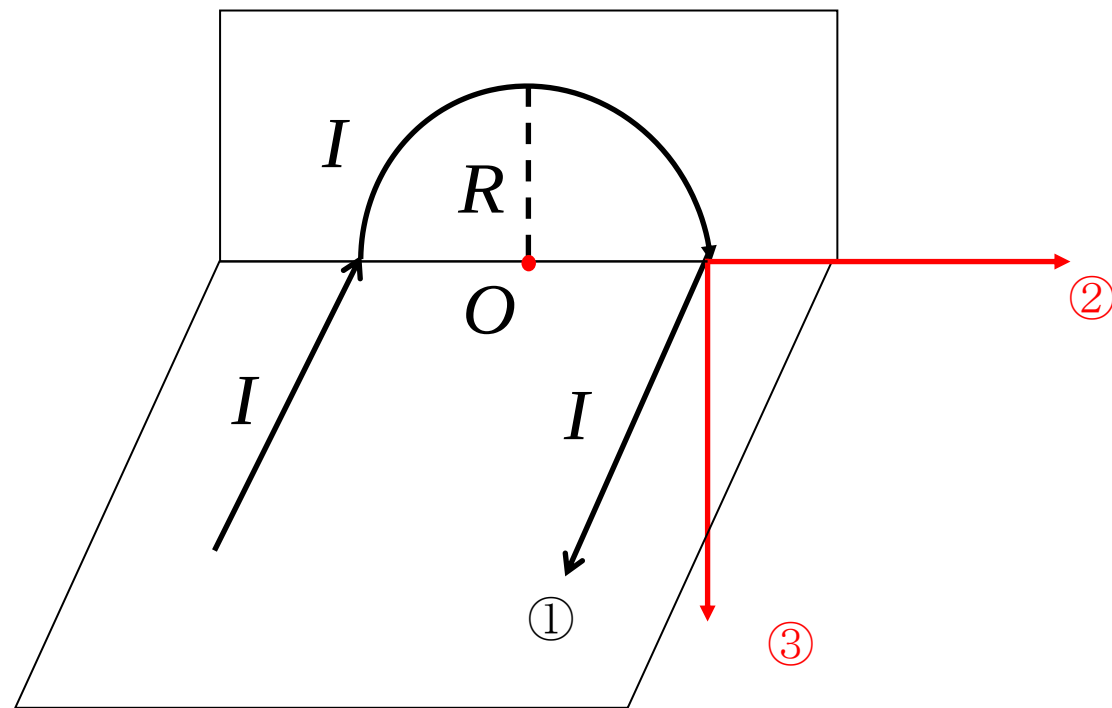
例46. 已知电流分布如图，求O点处磁感应强度？

解：

$$B_1 = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{4R}\right)^2}.$$

$$B_2 = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{4R}\right)^2}.$$

$$B_3 = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right)^2}.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例47. 直螺线管的长度为 L ，半径为 R ，单位长度上绕有 n 匝线圈，每匝线圈通电流为 I ，求螺线管内轴线上任一点 P 处的磁感应强度 B （ P 点到螺线管两端口处的半张角分别为 θ_1, θ_2 ）

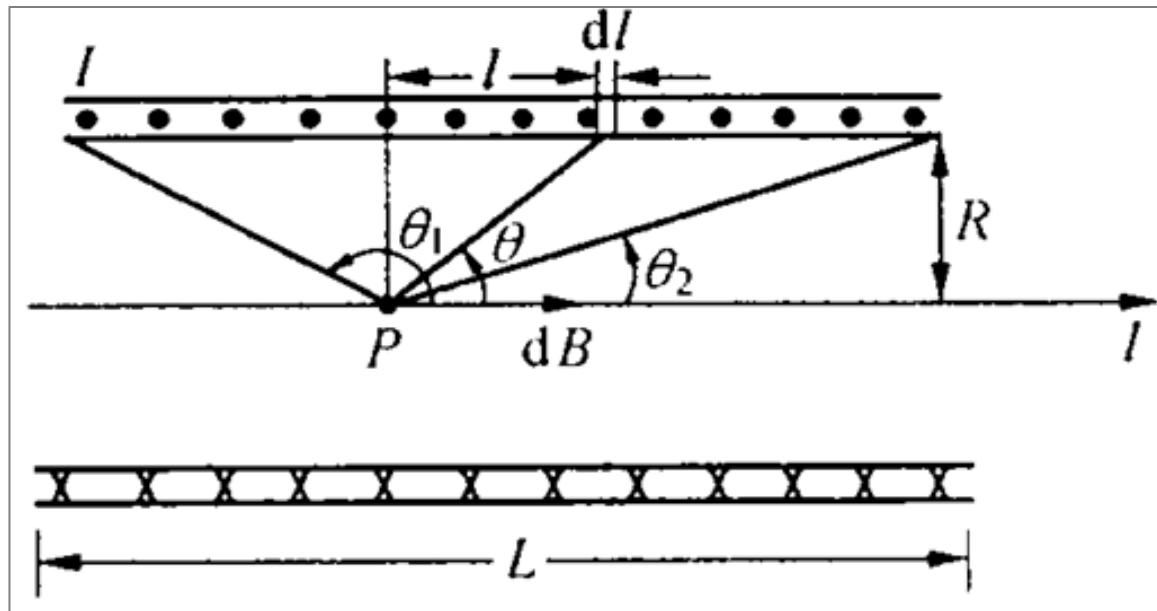
$$dI = nI dl \quad (\text{环形电流})$$

$$l = R \cot \theta,$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \theta$$

$$dl = -\frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} B &= \int \frac{\mu_0}{2R} \sin^3 \theta dI = \int \frac{1}{2} \mu_0 n I \cdot \frac{\sin^3 \theta}{R} dl \\ &= -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1). \end{aligned}$$

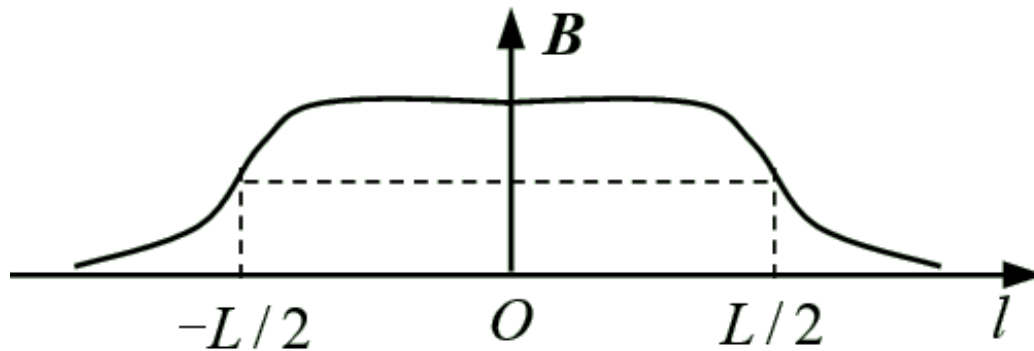




2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例47. 直螺线管的长度为 L ，半径为 R ，单位长度上绕有 n 匝线圈，每匝线圈通电流为 I ，求螺线管内轴线上任一点 P 处的磁感应强度 B （ P 点到螺线管两端口处的半张角分别为 θ_1 θ_2 ）

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$



【讨论1】 无限长均匀密绕直螺线管轴线：

$$B = \mu_0 n I.$$

【讨论2】 半限长均匀密绕直螺线管端面处：

$$B = \mu_0 n I / 2.$$



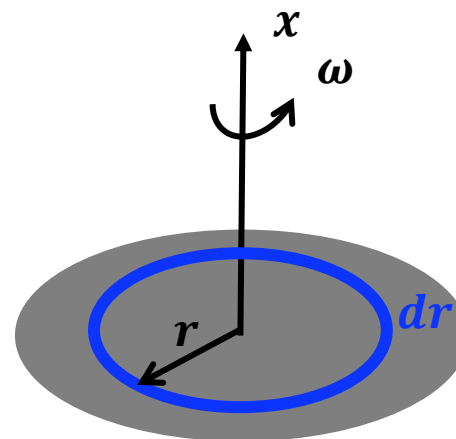
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例48. 如图所示，有一个半径为 R 的带电圆盘，电荷密度为 σ ，以匀角速度 ω 绕其轴线旋转，计算轴线上任一点的磁感应强度 B 。

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (\text{环形电流})$$

$$dI = dq \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \sigma dS \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \sigma 2\pi r dr \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \sigma \omega r dr$$

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 r^2 \sigma \omega r dr}{2(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{2(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{2x^2 + R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right]. \end{aligned}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

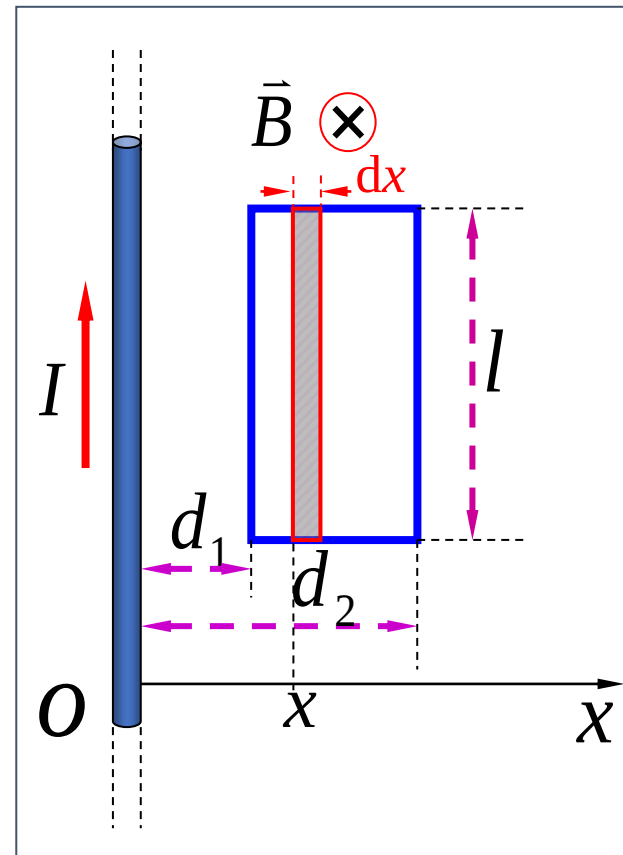
例49. 如图所示载流长直导线的电流为 I ,
试求通过矩形面积的磁通量.

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}.\end{aligned}$$

磁通量的计算是
“电磁感应”部
分的物理基础





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例50. 考虑无限长直导线产生的磁场，验证安培环路定理的过程分析

第1步：如图所示的环形闭合路径

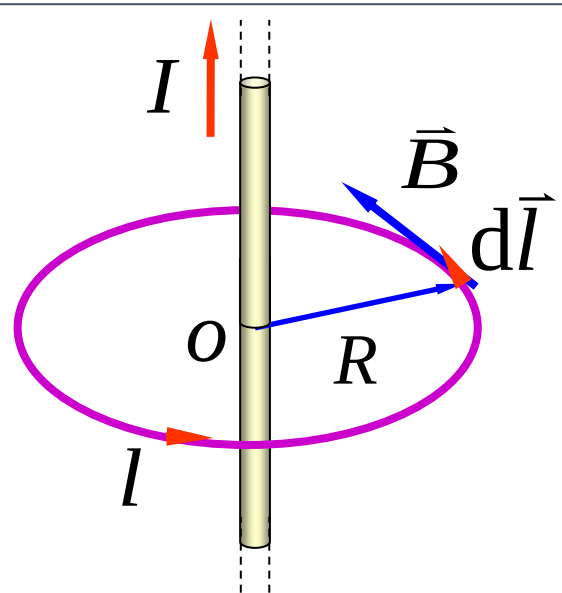
板书推导：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

第2步：若该闭合路径绕向为顺时针

板书推导：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例50. 考虑无限长直导线产生的磁场，验证安培环路定理的过程分析

第3步：如右下图的任意路径（**包围该电流**）

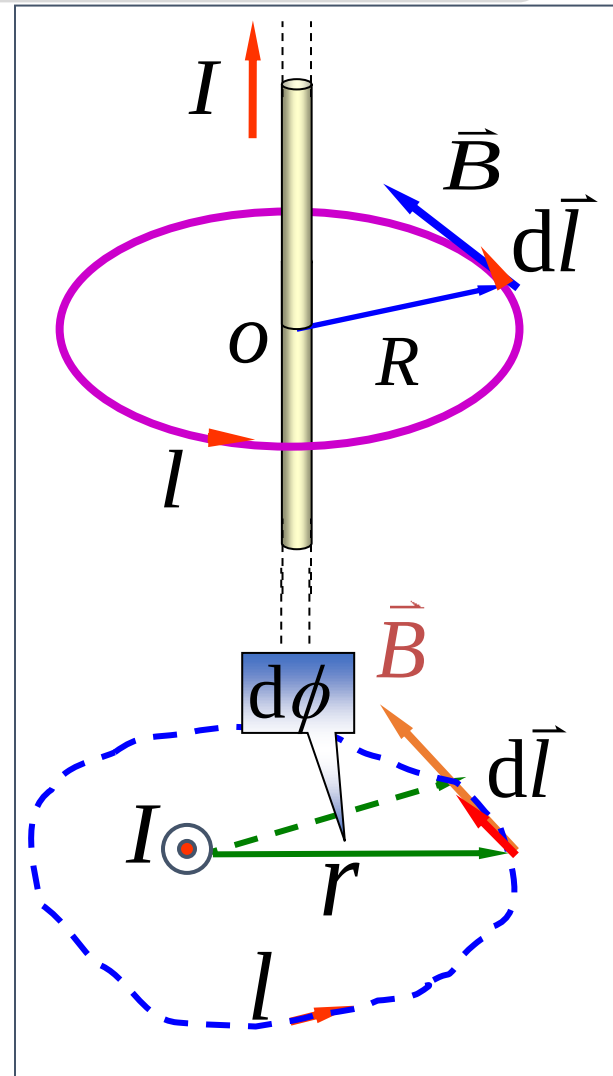
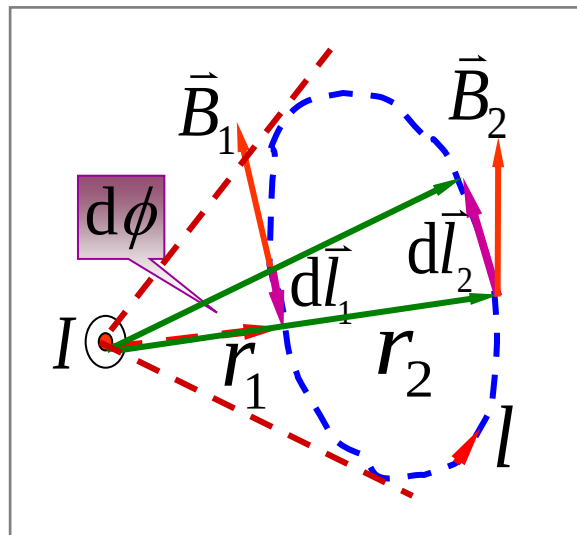
板书推导：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

第4步：路径不包围该电流（如下图）

板书推导：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例50. 考虑无限长直导线产生的磁场，验证安培环路定理的过程分析

第5步：多个稳恒电流的情况（如右侧图）

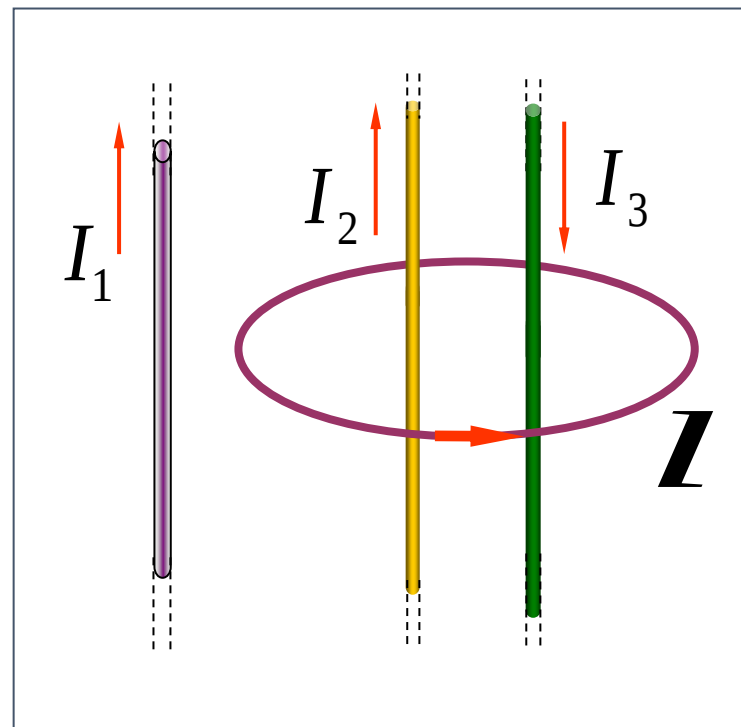
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3).$$

推而广之

安培环路定理

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{I \text{ 包围}} I_i$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例51. 求无限长载流圆柱体周围和内部的磁场
(假设电流在截面内均匀分布).

解: ① 对称性分析如右下图所示.
② 选择安培回路, 并进行相关推导:

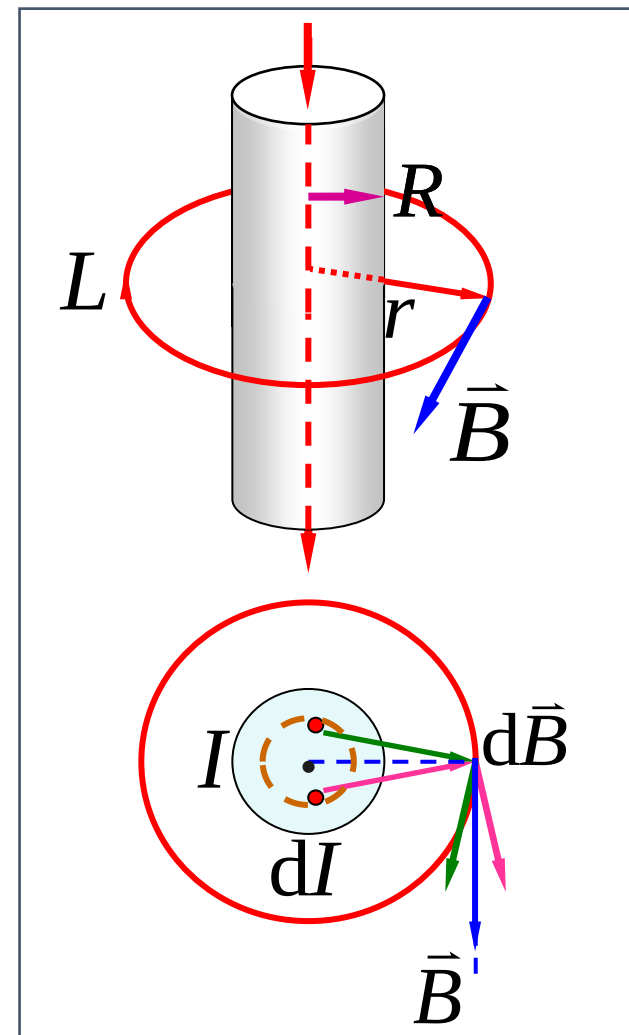
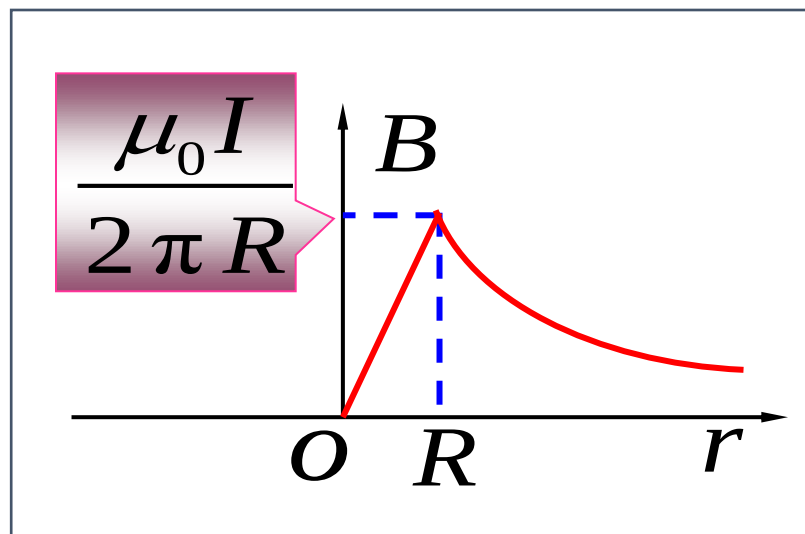
板书推导

$$r > R$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$

$$r < R$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi R^2}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例52. 求无限长载流圆柱面周围和内部的磁场
(假设面电流在柱面上均匀分布).

解: ① 对称性分析同例1。
② 选择安培回路, 并进行相关推导:

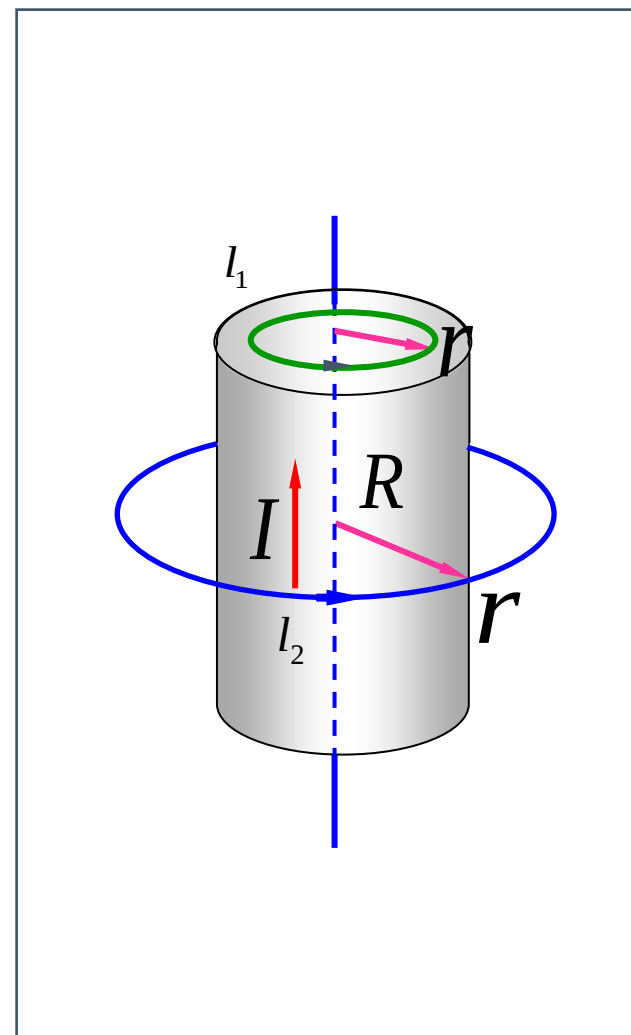
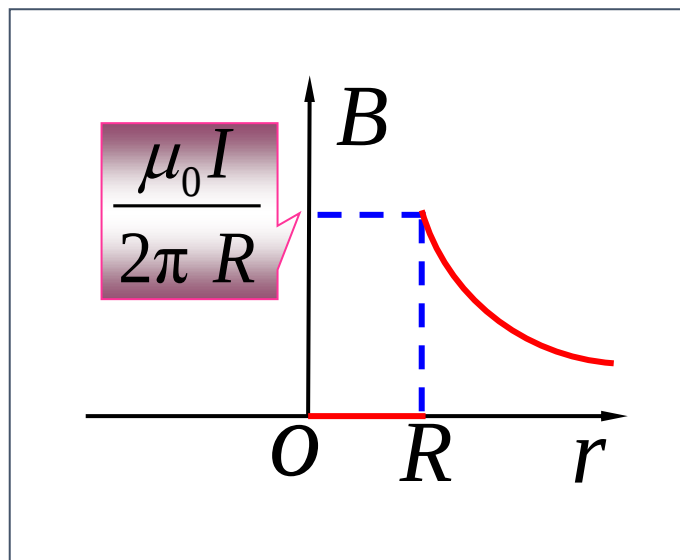
板书推导

$$r > R$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r < R$$

$$B = 0$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例53. 求无限大导体平面的磁场分布

(假设面电流在平面上均匀分布, 电流线密度为 i).

解: ① 对称性分析:

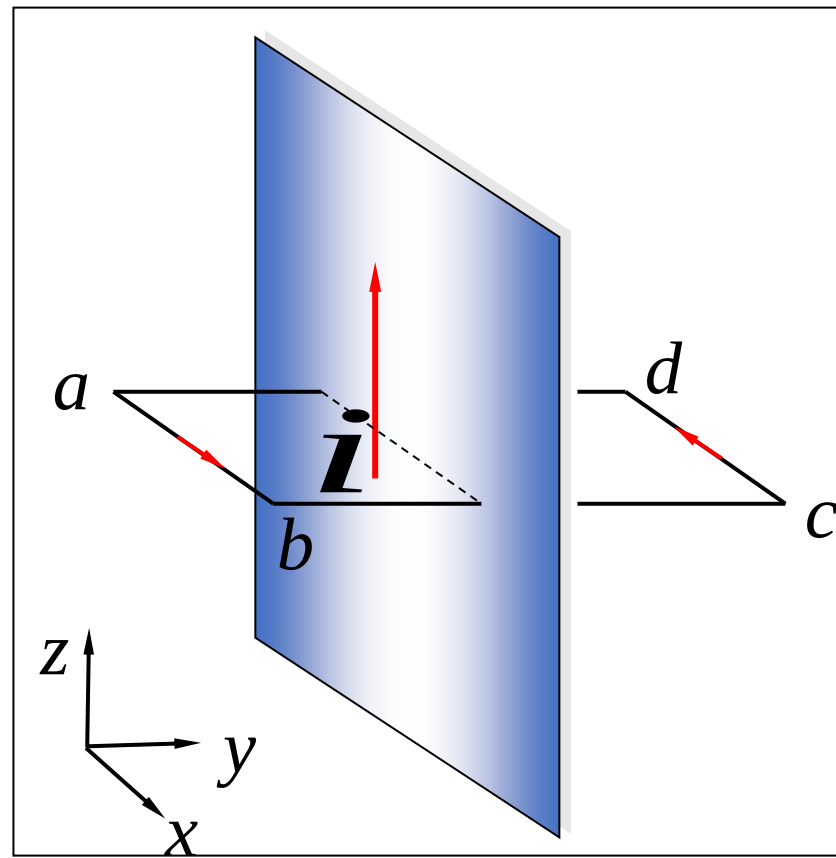
- 平面右侧磁场沿 x 轴正向;
- 平面左侧磁场沿 x 轴负向;

② 选择 $abcd$ 的安培回路:

$$\begin{aligned}\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 2 \int_a^b B \cdot dl \\ &= 2B|ab| = \mu_0 i |ab|\end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}.$$

(左右两侧均为匀强磁场)





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例54. 求载流螺绕环内的磁场

(假设 $R \gg d$, 线圈均匀密绕, 电流强度为 I).

解: ① 对称性分析:

- 线圈内磁感线为同心圆环;
- 环外磁场强度为0.

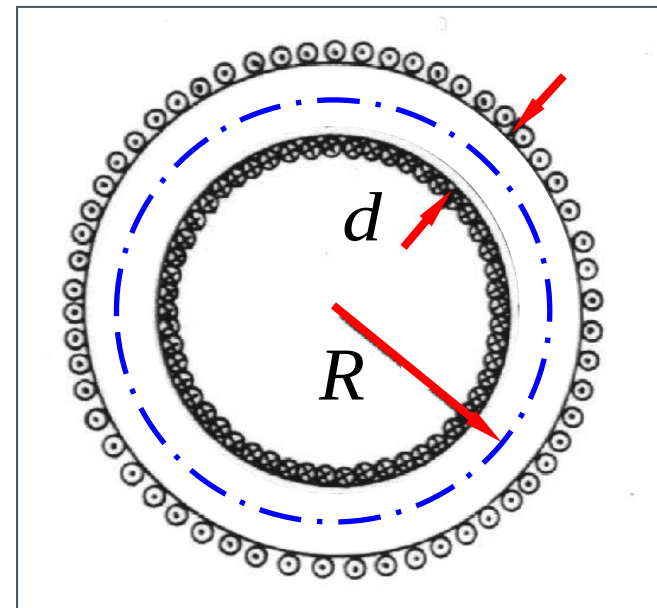
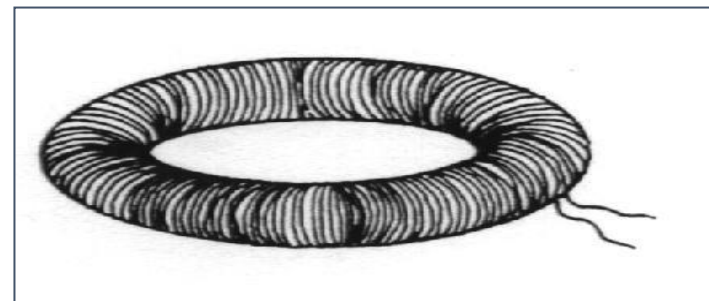
② 选择蓝色虚线的安培回路:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi R B = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \approx \mu_0 n I.$$

线圈内电流强度

单位长度的线圈匝数





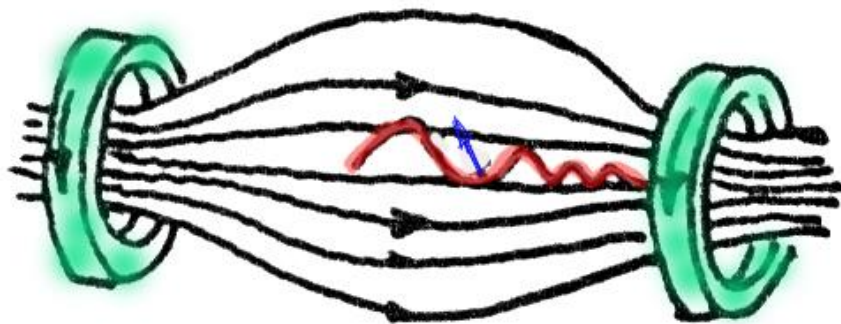
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例55. 带电粒子在非匀强磁场中受力问题

当带电粒子在非均匀磁场中向磁场较强的方向运动时，螺旋线半径将随着磁感应强度的增加而减少。

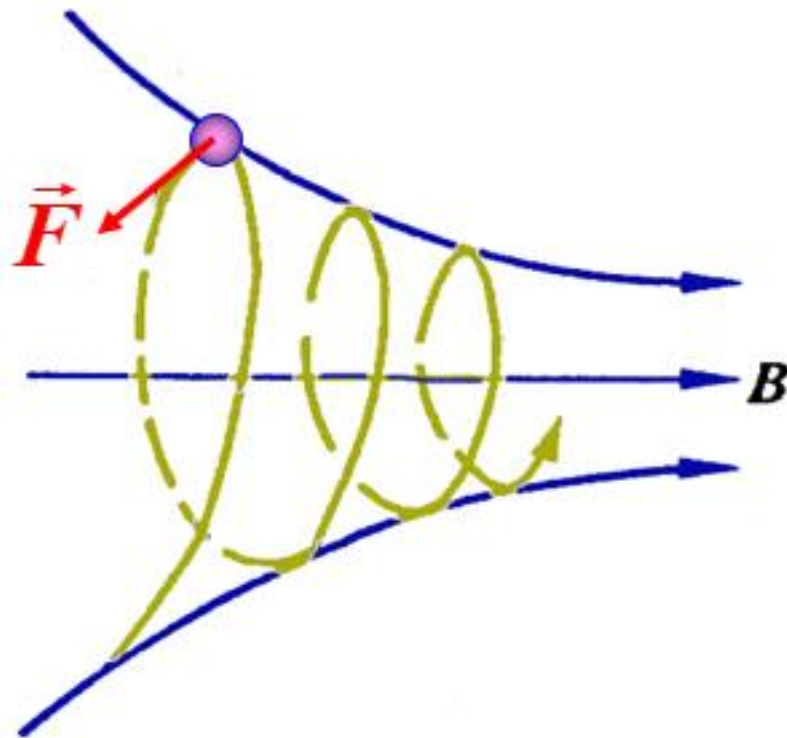
(如右侧图)

带电粒子受到的洛伦兹力指向磁场较弱方向，即阻碍向强磁场方向运动。



(磁镜/磁瓶的物理图像)

思考：这个现象在实际中有什么应用价值呢？





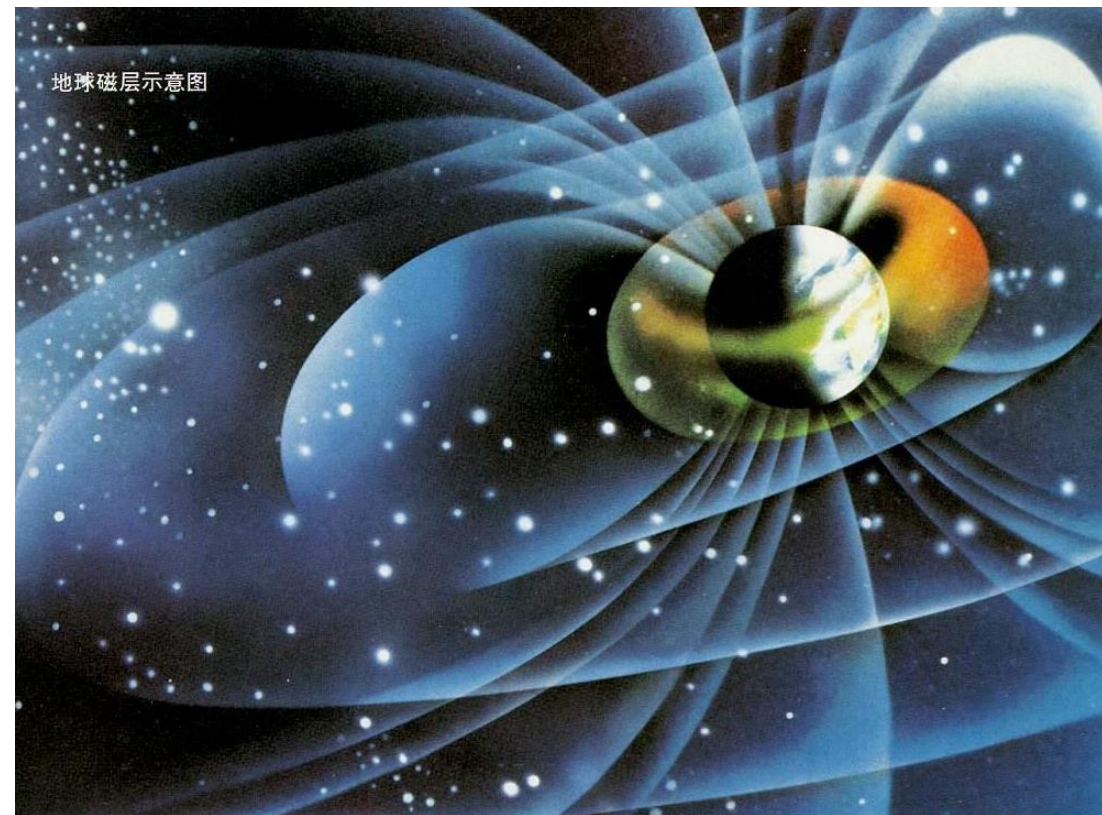
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例55. 带电粒子在非匀强磁场中受力问题

思考：这个现象在实际中有什么应用价值呢？



磁约束（等离子体的牢笼）

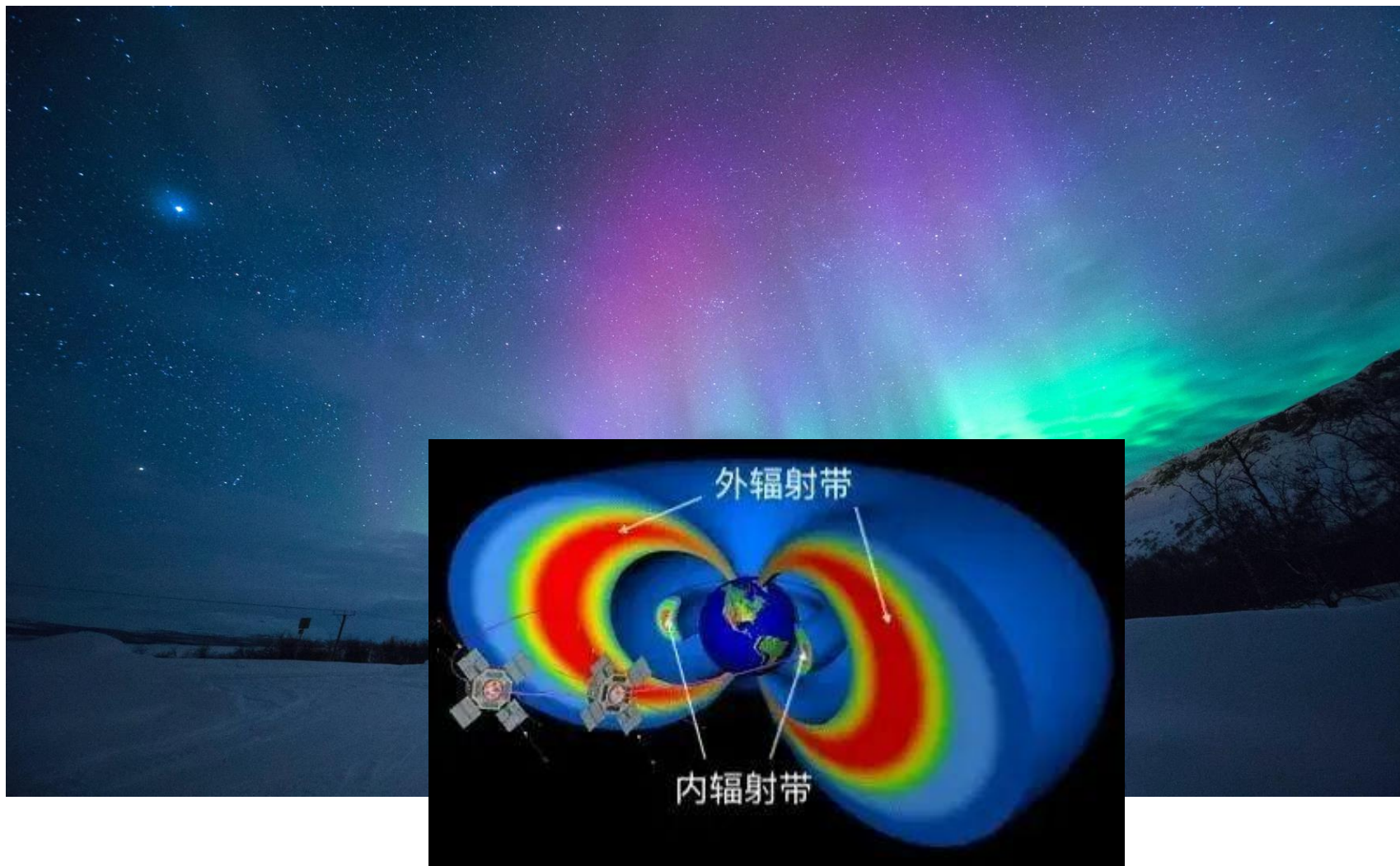


地球磁层示意图



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例55. 带电粒子在非匀强磁场中受力问题



在地磁两极附近：

由于磁感线与地面垂直，外层空间入射的带电粒子可直接射入高空大气层内，它们和空气分子的碰撞产生的辐射就形成了极光。

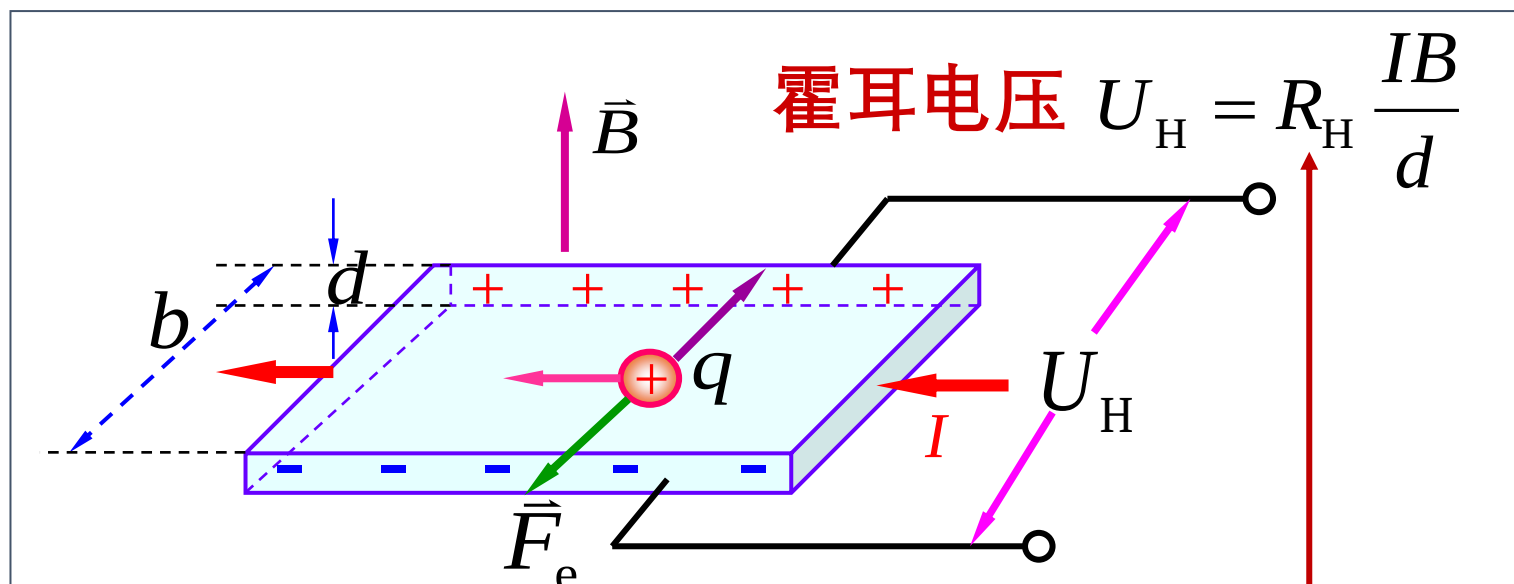
其他位置：

被地球的天然磁场捕获，在地球周围空间形成大量高能带电粒子的聚集区，也就是Van Allen辐射带。



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例56. 霍尔效应的推导



$$qE_H = qv_d B \longrightarrow E_H = v_d B \longrightarrow U_H = v_d Bb$$

$$I = qnv_d bd \longrightarrow U_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d}$$

霍尔系数



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例57. 从洛伦兹力到安培力的推导

$$\vec{F}_m = -e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

$$F_m = ev_d B \sin \theta$$

电流元受力

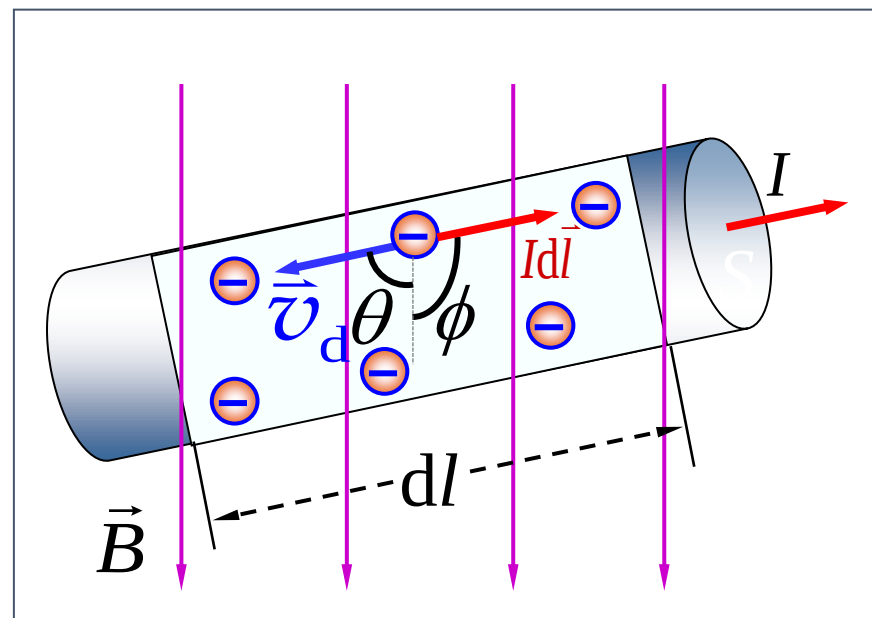
$$I = nev_d S$$

$$dF = nev_d S dl B \sin \theta$$

$$= Idl B \sin \theta$$

洛伦兹力垂直于
纸面向里：

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例57. 从洛伦兹力到安培力的推导

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{电流元受力}$$

叠加原理

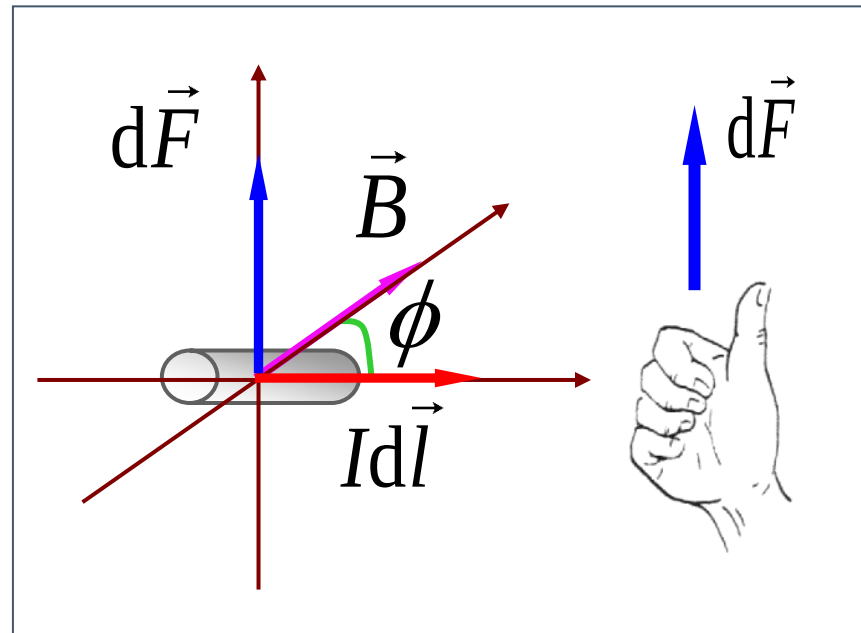
$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l Id\vec{l} \times \vec{B}$$

a) 匀强磁场

$$\vec{F} = \int_l Id\vec{l} \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B}. \quad (\text{与导线指向有关})$$

a) 非匀强磁场

平动 + 转动 (可利用力学知识进行分析)





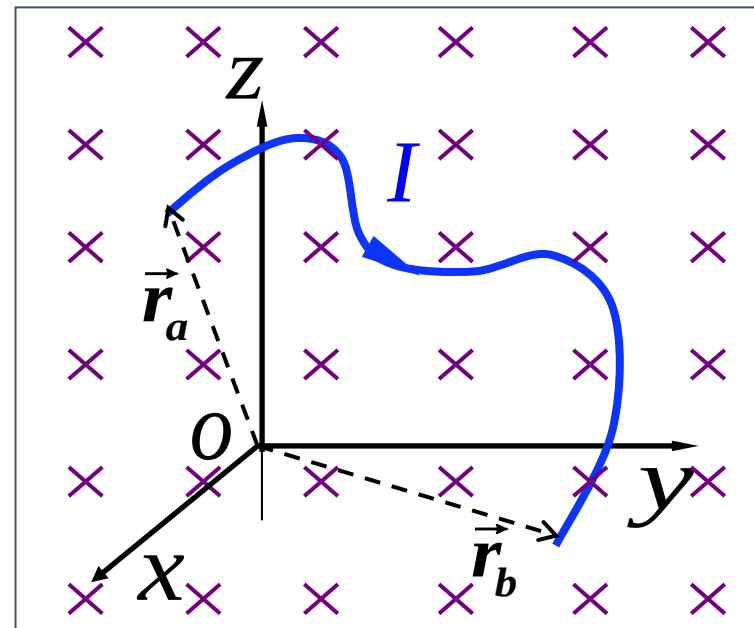
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例57. 从洛伦兹力到安培力的推导

$$\vec{F} = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B}.$$

沿导线积分

$$\vec{F} = I (\vec{r}_b - \vec{r}_a) \times \vec{B}.$$



在匀强磁场中，载流弯曲导线受的磁场力等于从起点到终点连接的直线流过相同电流受到的磁场力。



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例58. 平行无限长载流直导线间的相互作用

- 导线 1 在导线 2 处产生的磁感应强度为 $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$.
- 导线 2 上的任意电流元 $I_2 dl_2$ 受力为

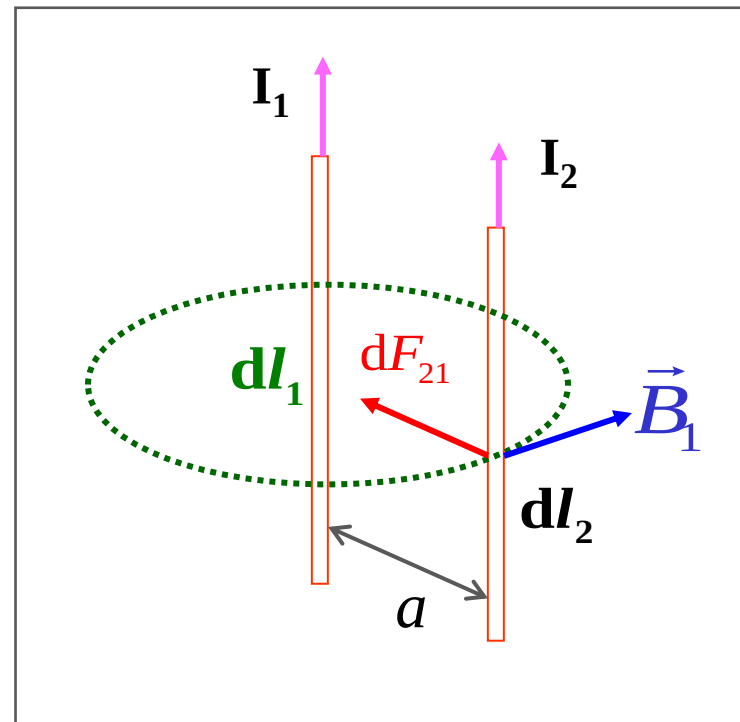
$$dF_{21} = I_2 dl_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2.$$

- 反之，导线 1 上的任意电流元受力为

$$dF_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_1.$$

- 所以，单位长度导线所受到的作用力的大小为

$$f = \frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{dF_{12}}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例58. 平行无限长载流直导线间的相互作用

- 若两根导线的电流相等 $f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}$.

科学小知识

1946年，国际计量委员会（CIPM）提出定义为：在真空中，截面积可忽略的两根相距1米的平行而无限长的圆直导线内，通以等量恒定电流，导线间相互作用力在1米长度上为 2×10^{-7} 牛时，则每根导线中的电流为1安培，又称绝对安培。该定义经1948年第9届国际计量大会（CGPM）通过。

真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$.



安培 (1775-1836)，法国物理学家。典型贡献：安培定则、安培环路定理、安培定律、提出分子电流假说、发明电流计、电动力学的创始人。电流强度的国际单位安培用其姓氏命名



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

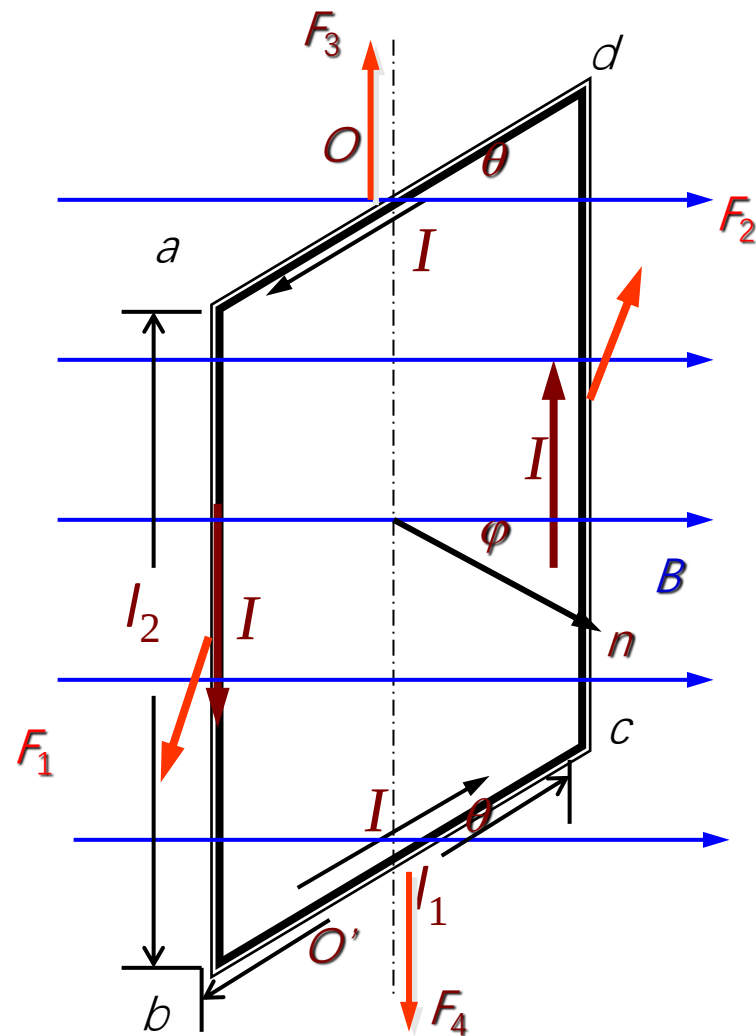
例59. 磁场对载流线圈的作用

$$F_3 = F_4 = BIl_1$$

方向相反，作用在同一直线上（与转轴平行）

$$F_1 = F_2 = BIl_2$$

方向相反，作用在不同直线上（对转轴力矩不为0）





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例59. 磁场对载流线圈的作用

磁力矩：

$$F_1 = F_2 = BIl_2$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} F_1 l_1 \sin \varphi + \frac{1}{2} F_2 l_1 \sin \varphi \\ &= BIl_1 l_2 \sin \varphi \\ &= BIS \sin \varphi \end{aligned}$$

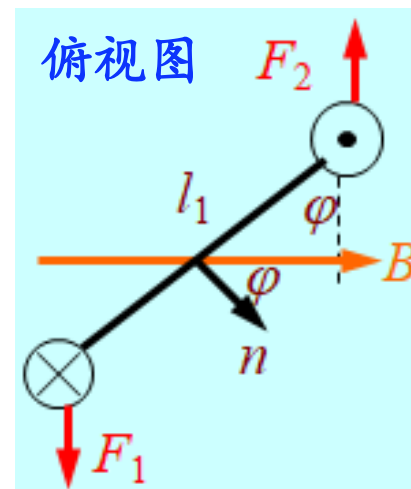
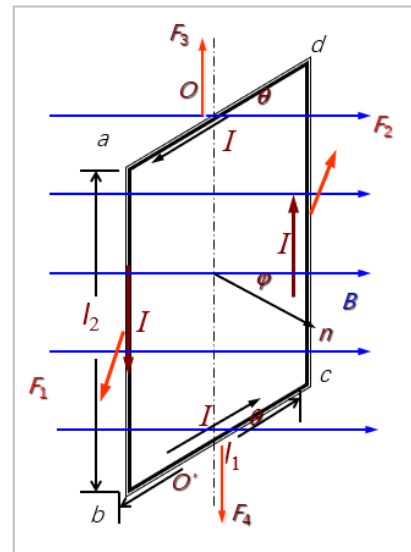
矢量形式：

$$\vec{M} = IS\vec{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

线圈的磁矩

适合于任意形状的
闭合载流线圈。

N 匝线圈的磁矩 $\vec{m} = NIS\vec{n}$





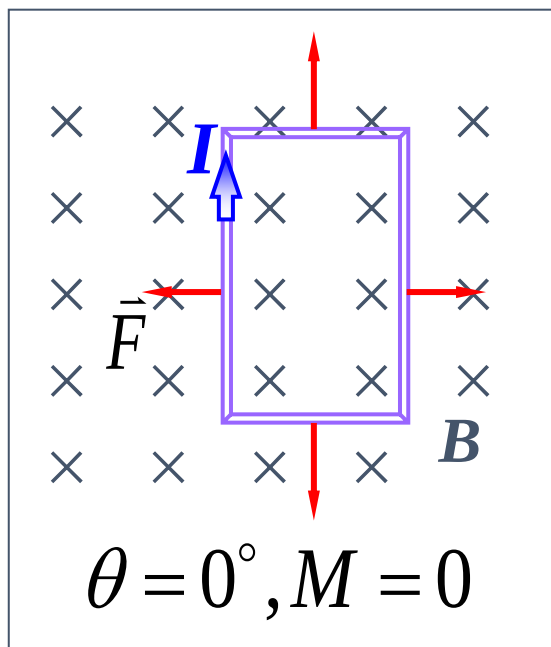
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例59. 磁场对载流线圈的作用

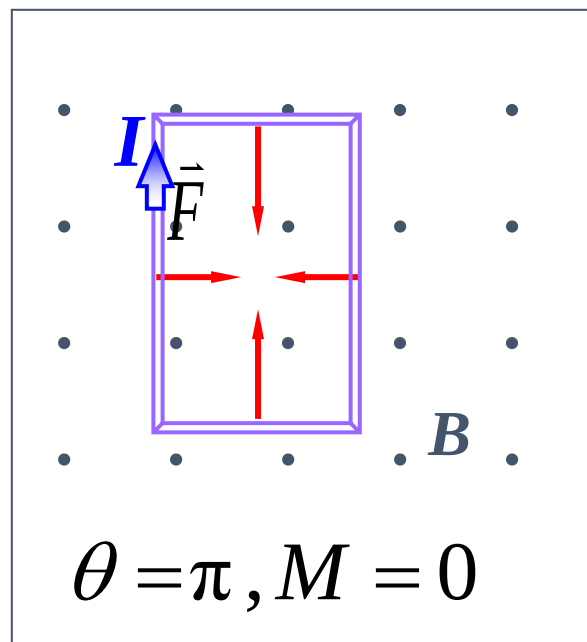
$$\vec{M} = IS\vec{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

- 讨论（定义 θ 为 $\vec{n}$ 与磁场 $\vec{B}$ 的夹角）：

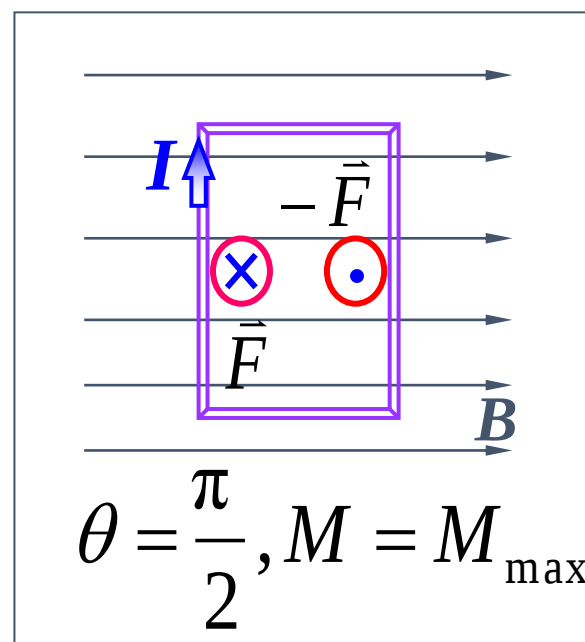
稳定平衡



不稳定平衡



力矩最大





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例60. 磁介质材料中安培环路定理的过渡

对如图所示的回路ABCD应用安培环路定理：

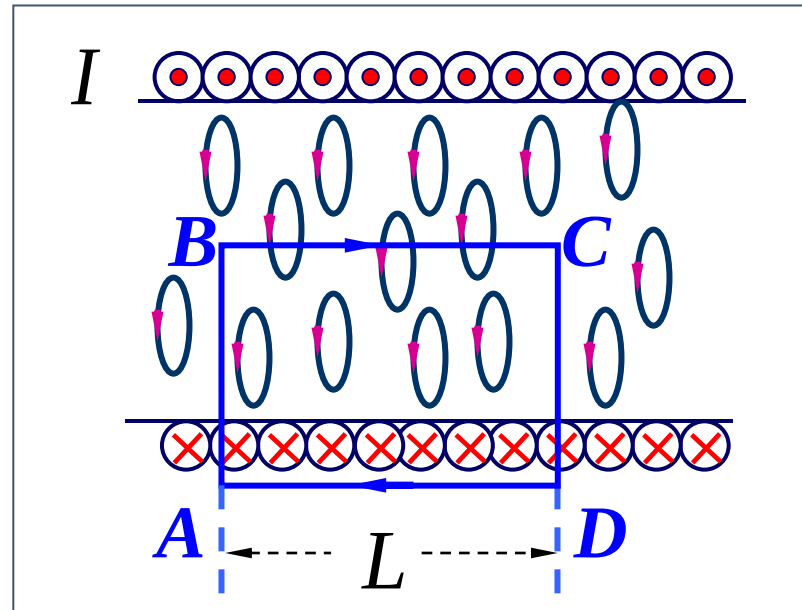
$$\begin{aligned}\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (NI + jL) \\ &= \underbrace{\mu_0 nIL}_{\text{传导电流}} + \underbrace{\int_{BC} \vec{M} \cdot d\vec{l}}_{\text{磁化电流}}\end{aligned}$$

推广：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{l \text{ 包围}} I_i + \mu_0 \oint_l \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{l \text{ 包围}} I_i$$

磁场强度



磁场强度沿路径的积分，仅与路径所包围的传导电流代数和有关。



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例60. 磁介质材料中安培环路定理的过渡

磁场强度：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad \text{单位: } \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$$

磁介质中的安培环路定理：

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{l \text{ 包围}} I_i$$

顺磁质

$$\mu_r > 1$$

抗磁质

$$\mu_r < 1$$

铁磁质

$$\mu_r \gg 1$$



$$\oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{l \text{ 包围}} I_i$$

各向同性的磁介质中，磁化强度满足：

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

磁化率

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

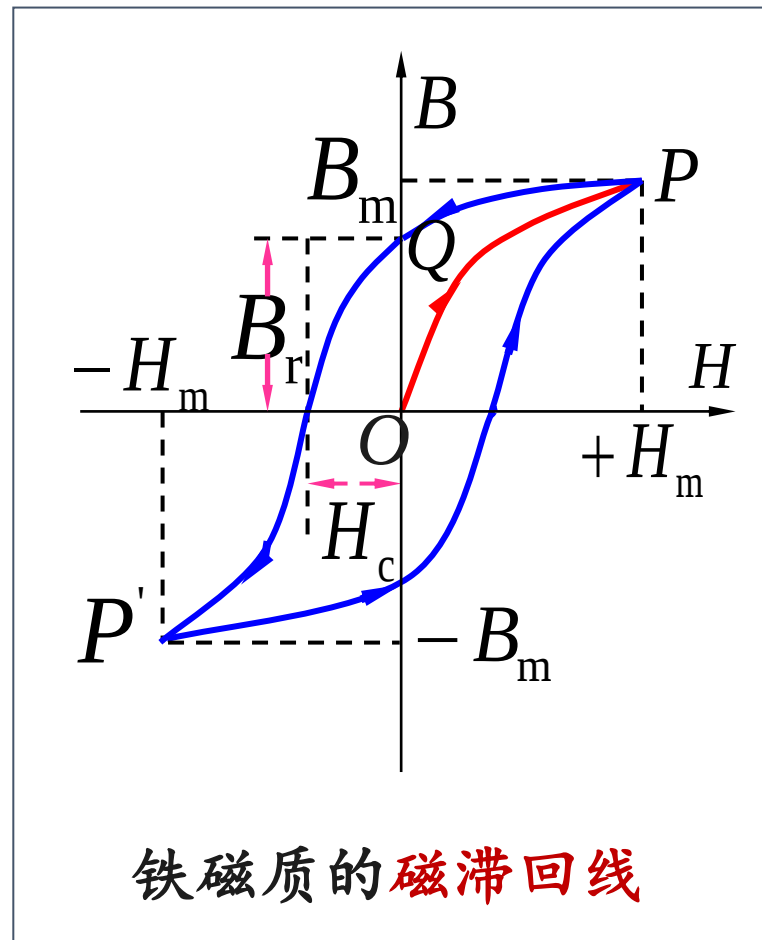


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例61. 铁磁材料的磁化曲线和磁滞回线物理图像

当外磁场由 $+H_m$ 逐渐减小时，这种 B 的变化落后于 H 的变化的现象，叫做**磁滞现象**，简称磁滞。

由于**磁滞**，即便 $H = 0$ 时，磁感应强度并不等于0， B_r 叫**剩磁**。图中 H_c 称**矫顽力**。





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

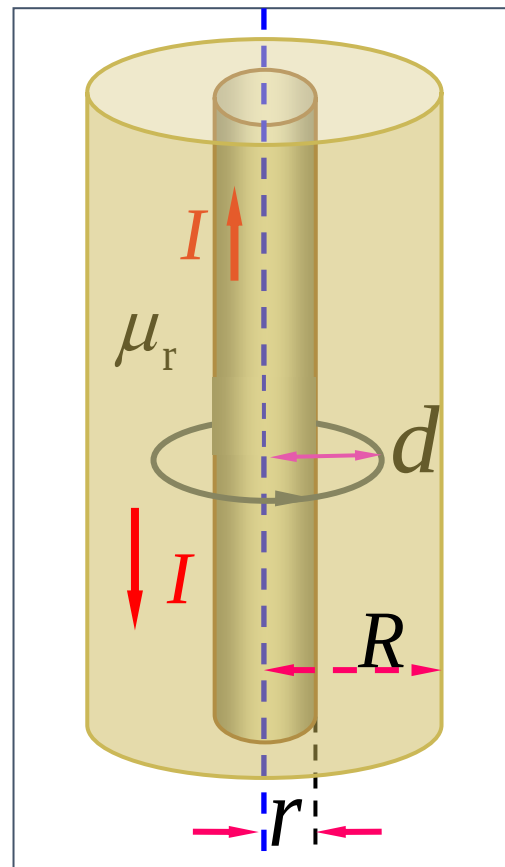
例62. 有两个半径分别为 R 和 r 的“无限长”同轴圆筒形导体，在它们之间充以相对磁导率为 μ_r 的磁介质. 当两圆筒通有相反方向的电流 I 时，试求：(1) 磁介质中任意点 P 的磁感应强度的大小；(2) 圆柱体外面一点 Q 的磁感强度.

解： 板书推导

$$(1) \ r < d < R: \quad H = \frac{I}{2\pi d}. \quad B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi d}.$$

$$(2) \ d > R: \quad H = 0. \quad B = 0.$$

$$(3) \ d < r: \quad H = 0. \quad B = 0.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例63. 半径为 R 载有电流 I_2 的导体圆环与电流为 I_1 的长直导线放在同一平面内 (如图所示). 直导线与圆心相距为 d , 且 $R < d$ 两者间绝缘, 求作用在圆电流上的磁场力.

解:
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d + R \cos \theta}.$$

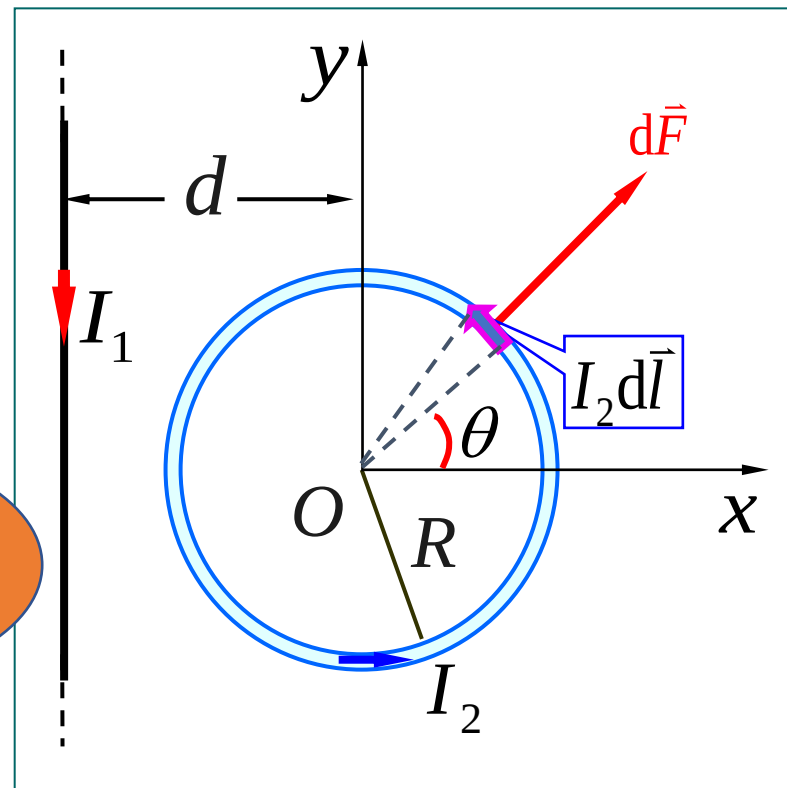
$$dl = R d\theta$$

$$dF = BI_2 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{R d\theta}{d + R \cos \theta}.$$

$$dF_x = dF \cos \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{R \cos \theta d\theta}{d + R \cos \theta}.$$

$$F_x = \int_0^{2\pi} dF_x = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}}\right).$$

磁力矩
如何分析?





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例64. 在测量铁磁质磁化特性的实验中，所用的螺绕环共1000匝，螺绕环的平均半径为15.0 cm，当通有2.0 A电流时，测得环内磁感应强度 $B = 1.0 \text{ T}$ ，则此时该铁磁质的相对磁导率为_____；磁导率为_____。(2018春大物A真题)

$$\begin{aligned} N &= 1000, \\ R &= 0.15 \text{ m}, \\ I &= 2.0 \text{ A}, \\ B &= 1.0 \text{ T}. \end{aligned}$$

$$n = \frac{N}{2\pi R}, \quad H = nI, \quad B = \mu H = \mu_r \mu_0 H.$$

$$\rightarrow \mu = \frac{B}{H} = \frac{B}{nI} = \frac{2\pi RB}{NI}$$

$$= \frac{2\pi \times 0.15 \times 1}{1000 \times 2} = 0.15\pi \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} = 4.71 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$$

$$\rightarrow \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{2\pi RB}{NI\mu_0} = \frac{2\pi \times 0.15 \times 1}{1000 \times 2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = \frac{3000}{8} = 375.$$

第七章 恒定磁场

本章介绍 问题引入 磁场的高斯定理 安培环路定理 随堂例题 本节小结

例4. 求载流螺绕环内的磁场
(假设 $R \gg d$ ，线圈均匀密绕，电流强度为 I)。

解： ① 对称性分析：

- 线圈内磁感线为同心圆环；
- 环外磁场强度为0。

② 选择蓝色虚线的安培回路：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi RB = \mu_0 NI$$

$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \approx \mu_0 nI$

线圈内电流强度

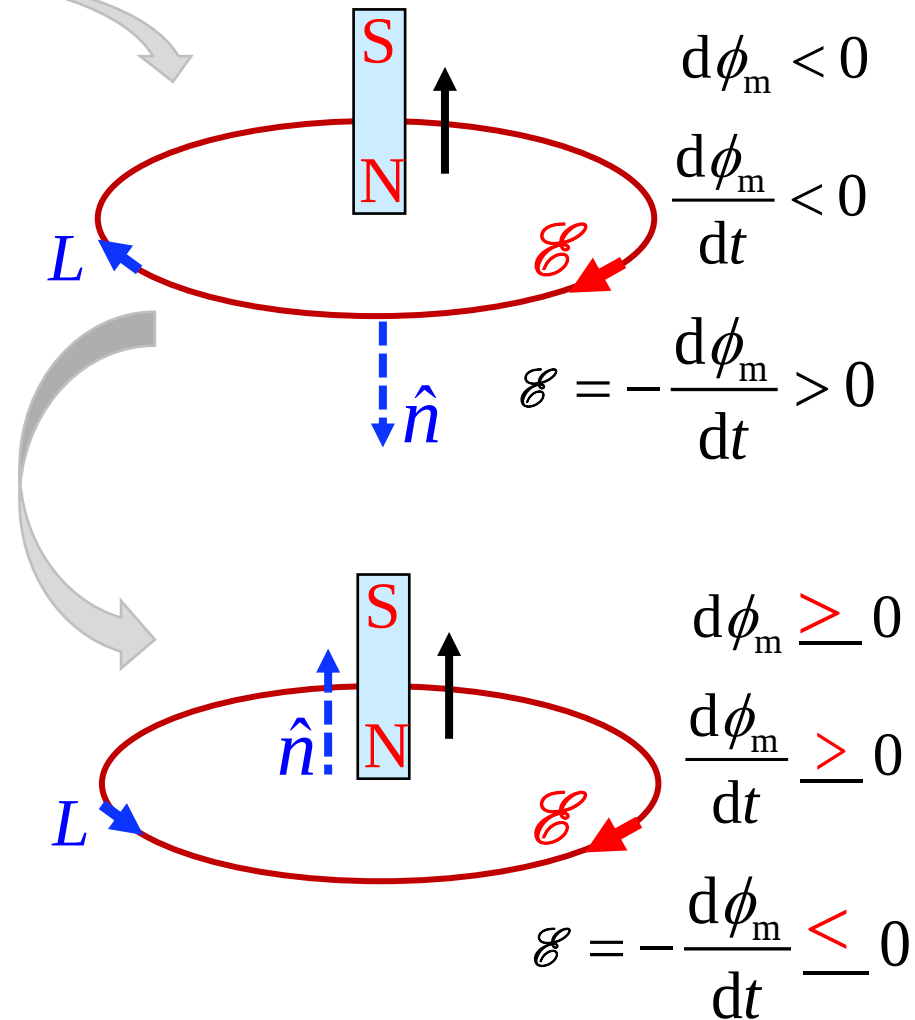
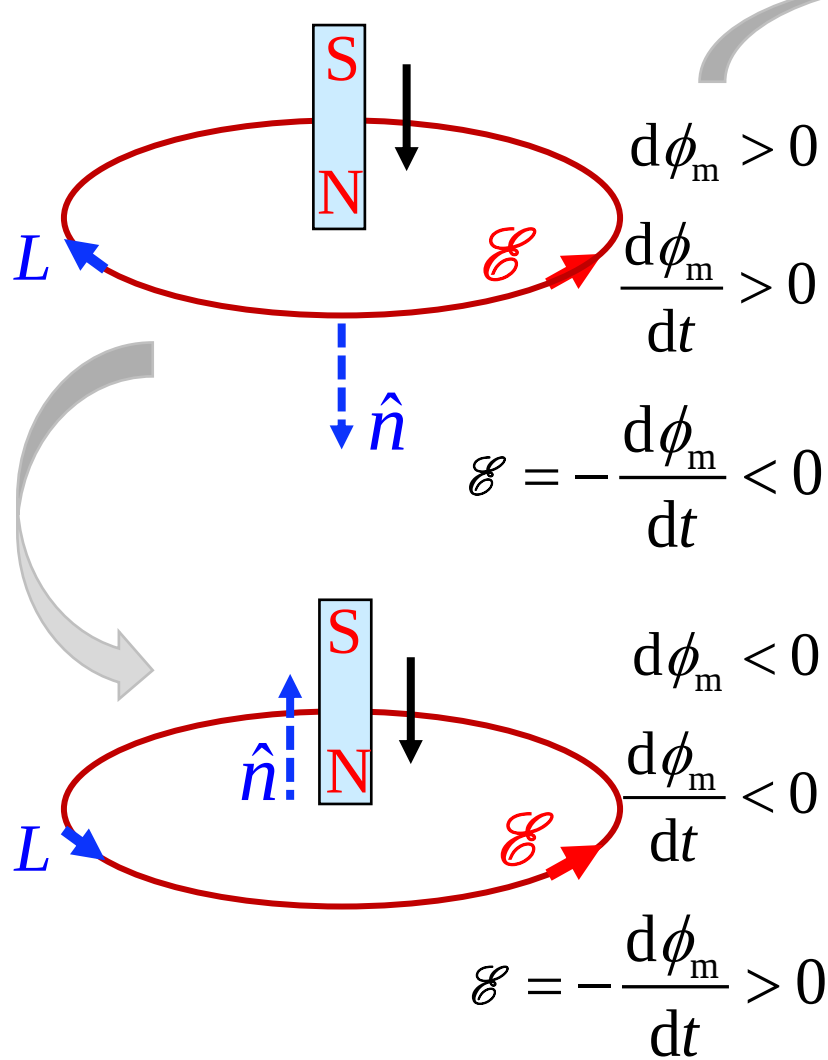
单位长度的线圈匝数



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例66. 根据电磁感应定律判断感生电动势的方向

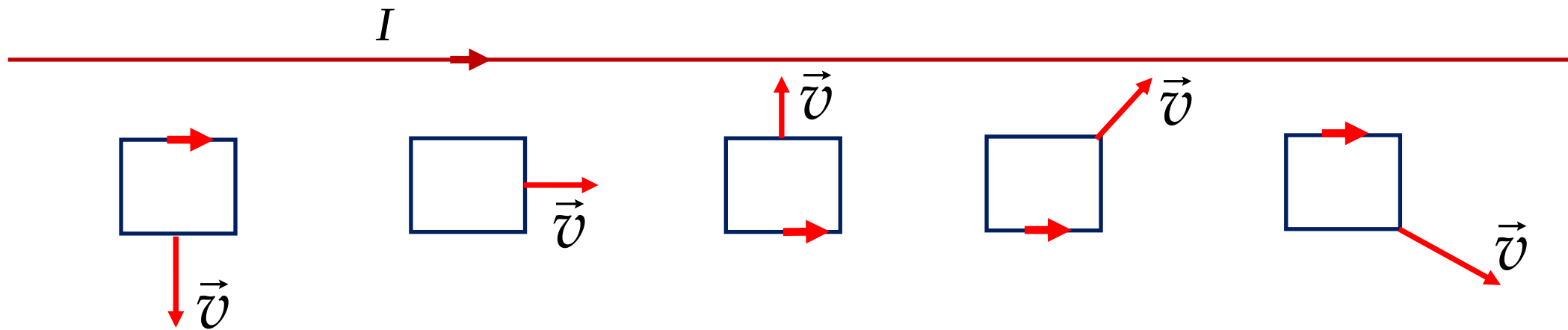
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例67. 如图，判断感应电流的方向。



发生电磁感应时，闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场**阻止**引起感应电流的磁通量的变化。

—— 楞次定律是**能量守恒**的具体体现。

—— 用以**判断**闭合回路中感应电流的方向。



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例68. 如图，求回路中感应电动势的大小和方向。

解： 选择回路 $abca$

$$\phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = -Blx.$$

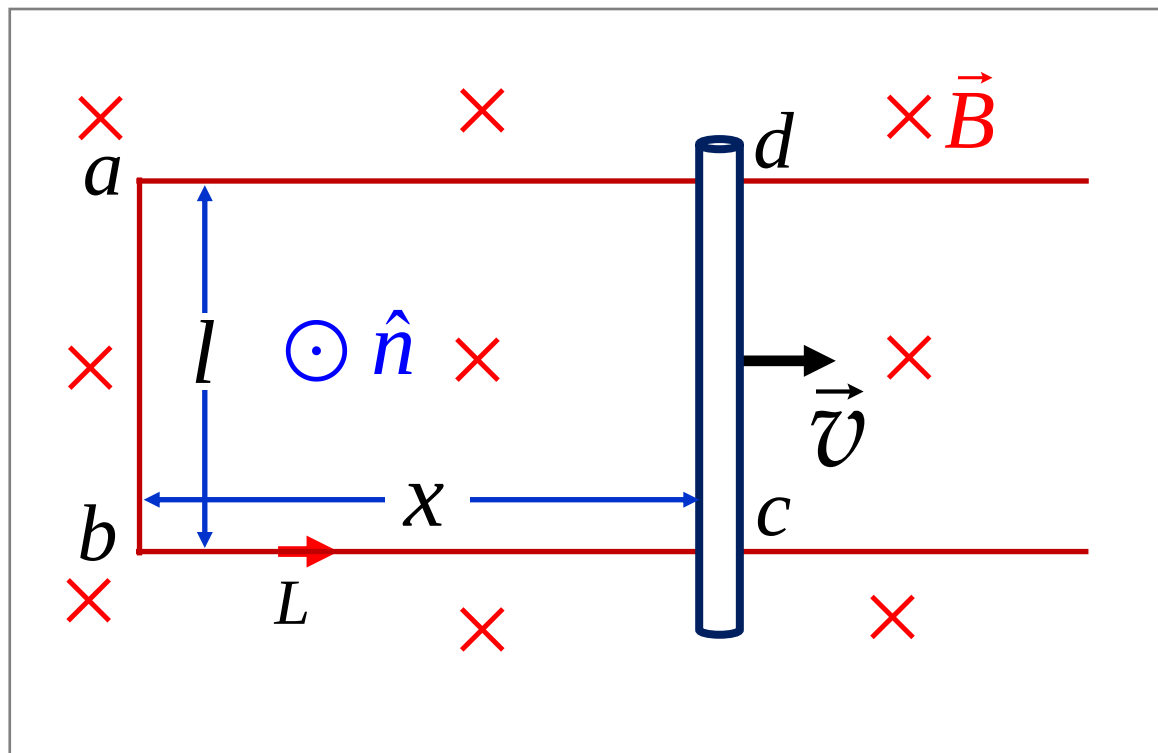
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = Blv.$$

电动势方向： $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$

若回路电阻为 R ，则感应电流：

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\phi_m}{dt} \longrightarrow q = \int I dt = -\frac{1}{R} \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2).$$

思考该式的物理内涵？





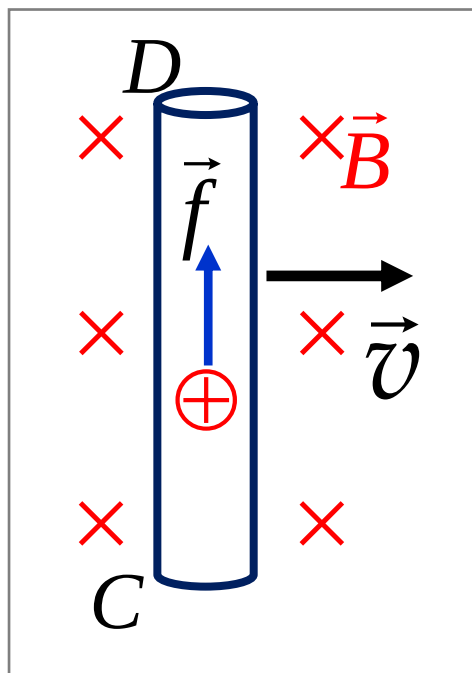
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例69. 动生电动势的物理图像

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = Blv.$$

是谁提供了非静电力？

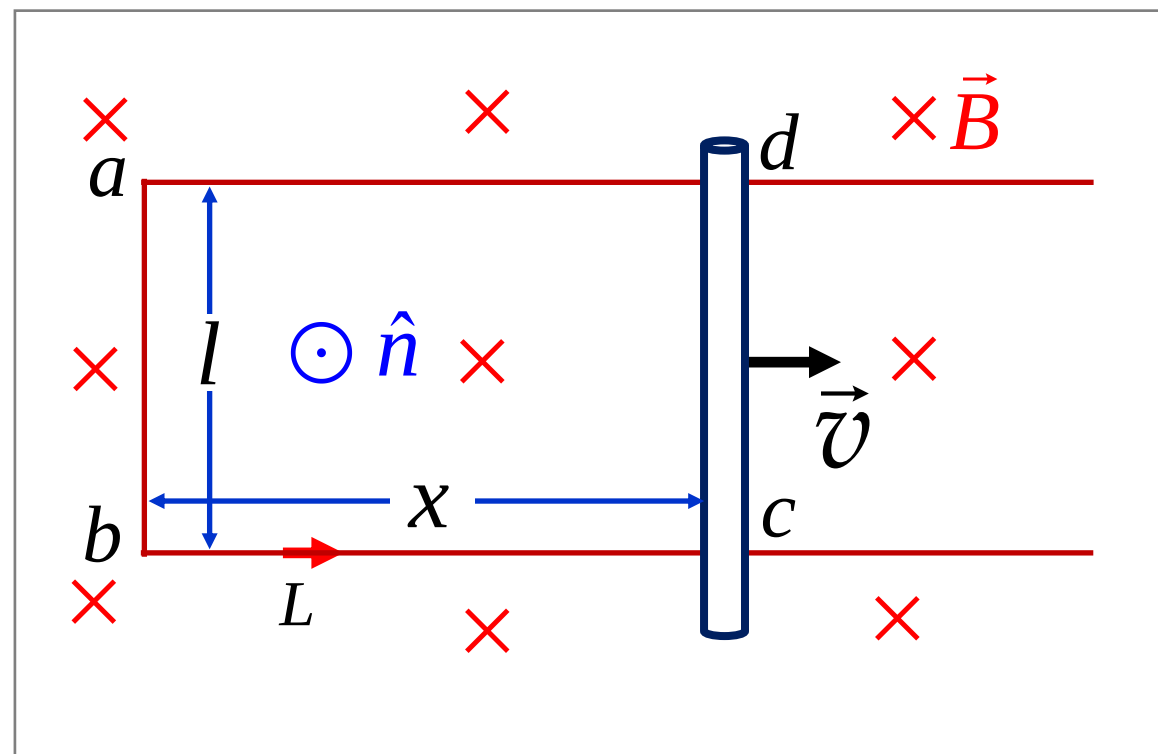
洛伦兹力！



$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{f}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (\text{非静电场场强})$$

$$\mathcal{E} = \int_C^D \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$



- 洛伦兹力 **不做功**
- 洛伦兹力 **提供非静电力**

这之间是否矛盾？



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

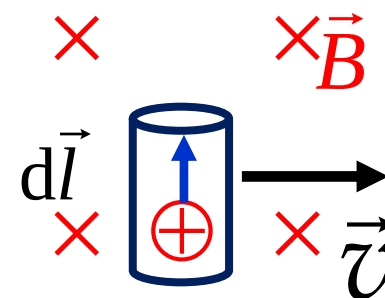
例69. 动生电动势的物理图像

若考虑在磁场中运动导体 CD 的一小段 $d\vec{l}$ ，则

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

若回路中充当**电源**的部分无法区分，则

$$\mathcal{E} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例70. 如图，求动生电动势。

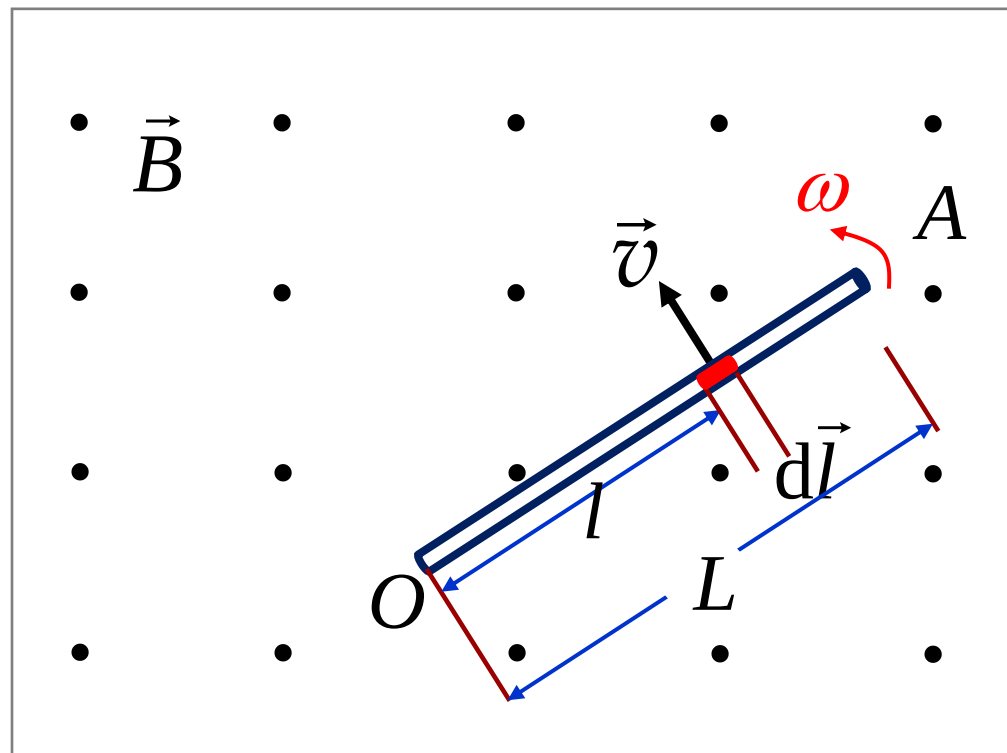
解：

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$
$$= vB \mathrm{d}l = \omega B l \mathrm{d}l$$

$$\mathcal{E} = \int_{\overline{OA}} \mathrm{d}\mathcal{E}$$

$$= \omega B \int_0^L l \mathrm{d}l = \frac{1}{2} \omega B L^2$$

—— 正电荷向 A 端移动，或者说， A 端电势高。





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

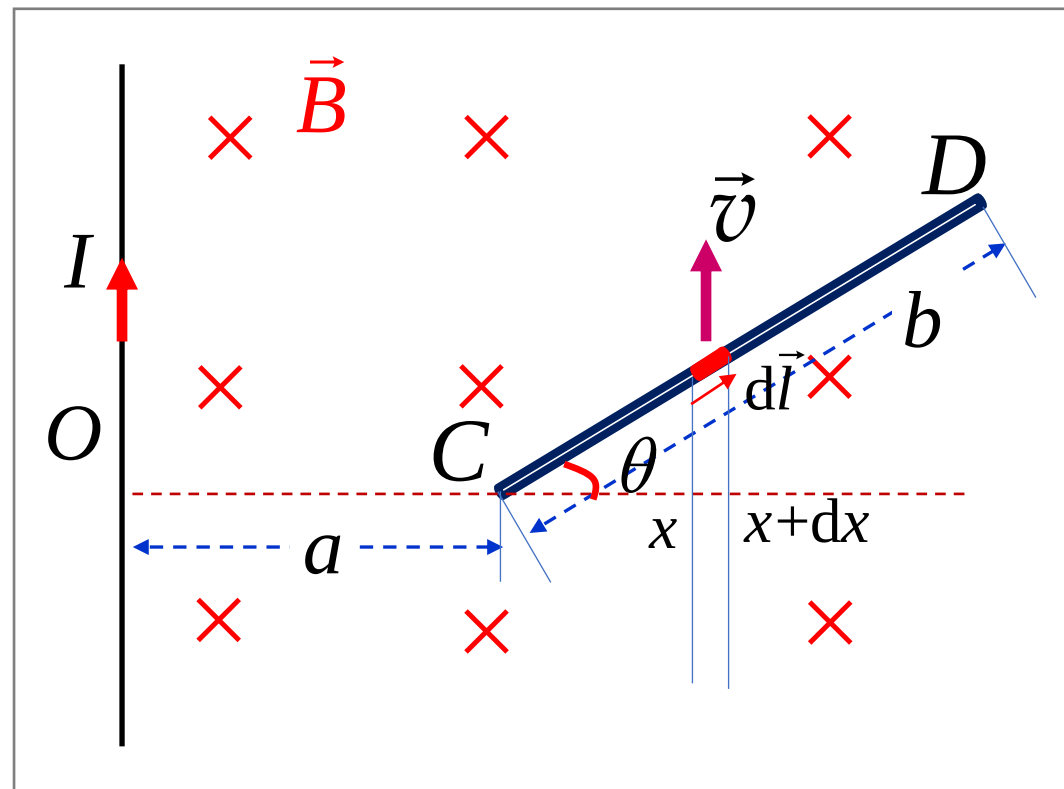
例71. 如图，求动生电动势。

解：

$$\begin{aligned}d\mathcal{E} &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\&= v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dl \cos(\pi - \theta) \\&= -v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dl \cos \theta \\&= -\frac{v\mu_0 I}{2\pi} \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = \int_b d\mathcal{E} = -\frac{v\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{a+b\cos\theta} \frac{dx}{x} = -\frac{v\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b\cos\theta}{a}.$$

负号代表C端
电势高。





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例72. 感生电场的物理内涵

库仑场 E_c

静电场

——由静止的电荷产生

导体中的恒定电场

——导体内有恒定电流时存在的电场

运动电荷产生的电场

——由运动的电荷产生

感生电场 E_i

感生电场

——由变化的磁场诱导产生

• 库仑场 E_c 有源 无旋

$$\oiint_S \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q, \quad \oint_L \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{真空})$$

• 感生电场 E_i 无源 有旋

$$\oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_i$$



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e$$

(高斯定理)

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(电磁感应定律)



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

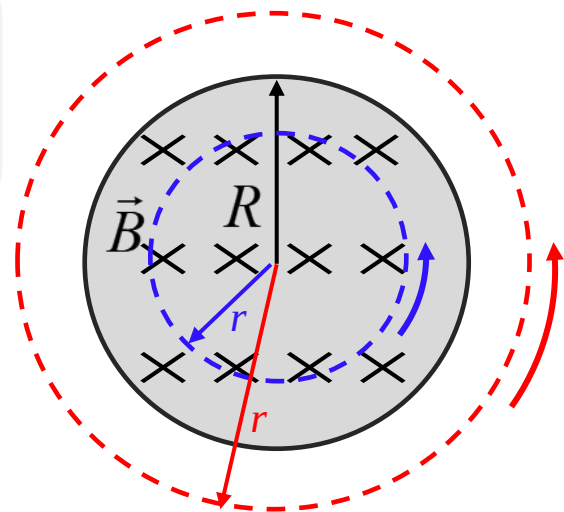
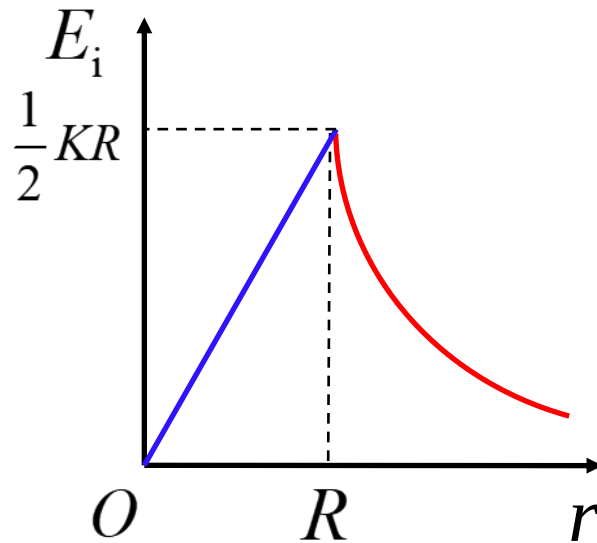
例73. 如图所示在半径为 R 的载流长螺线管内分布着均匀磁场，磁感应强度 $\vec{B}$ 以恒定速率 $K = dB/dt > 0$ 变化，求螺线管内外感生电场的分布。

解：管内 ($r < R$) : $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$

$$E_i \cdot 2\pi r = -K\pi r^2, \Rightarrow E_i = -\frac{1}{2}Kr$$

管外 ($r > R$) : $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{dB}{dt}\pi R^2,$

$$E_i \cdot 2\pi r = -K\pi R^2, \Rightarrow E_i = -\frac{KR^2}{2r}$$

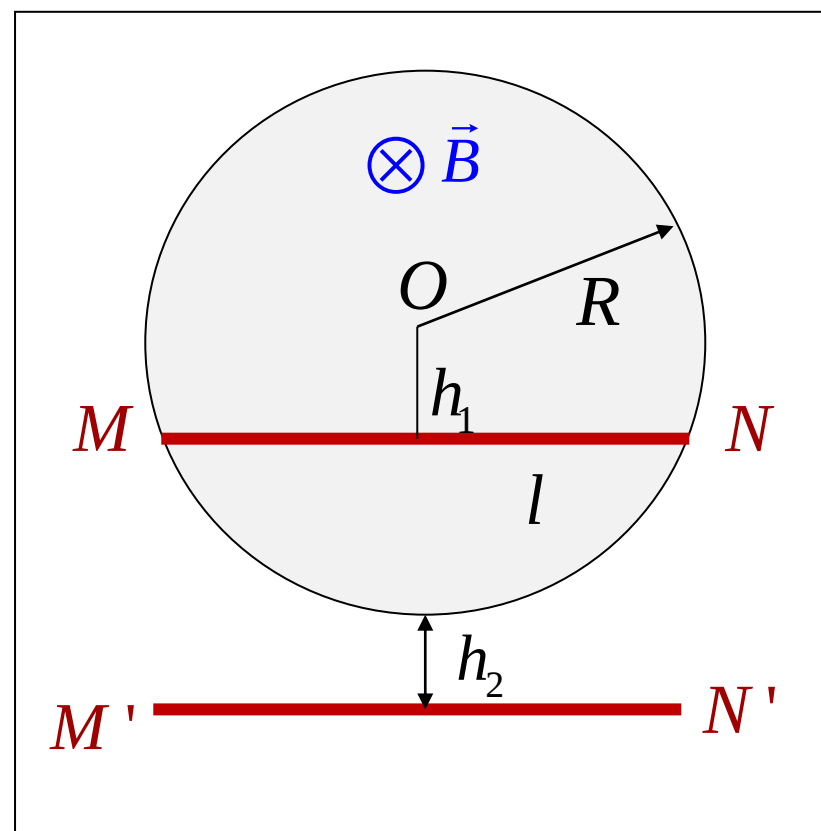
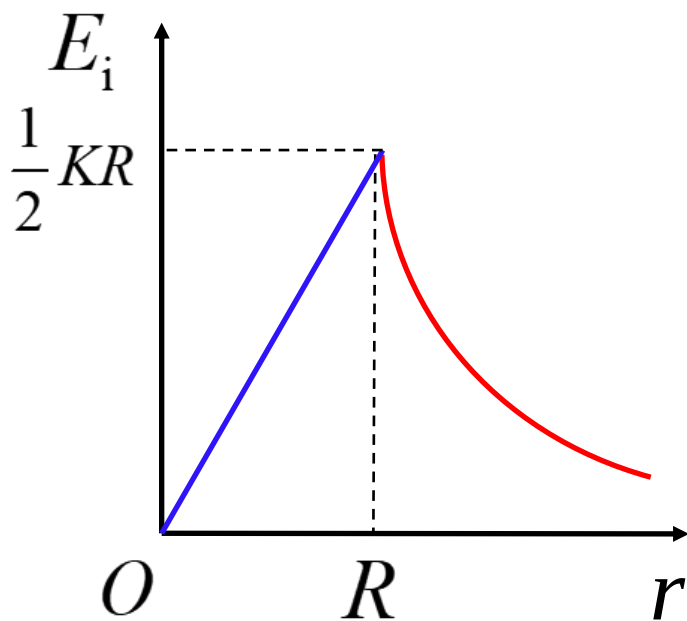


注：负号——代表感生电场“沿逆时针方向”



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例74. 在上题中，若螺线管内、外分别横放两根金属细棒 MN 和 $M'N'$ ，棒长均为 l 。求棒中的感生电动势 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ ？有无感生电流？





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例75. 自感电动势的物理图像

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$



亨利

自感系数，简称自感。

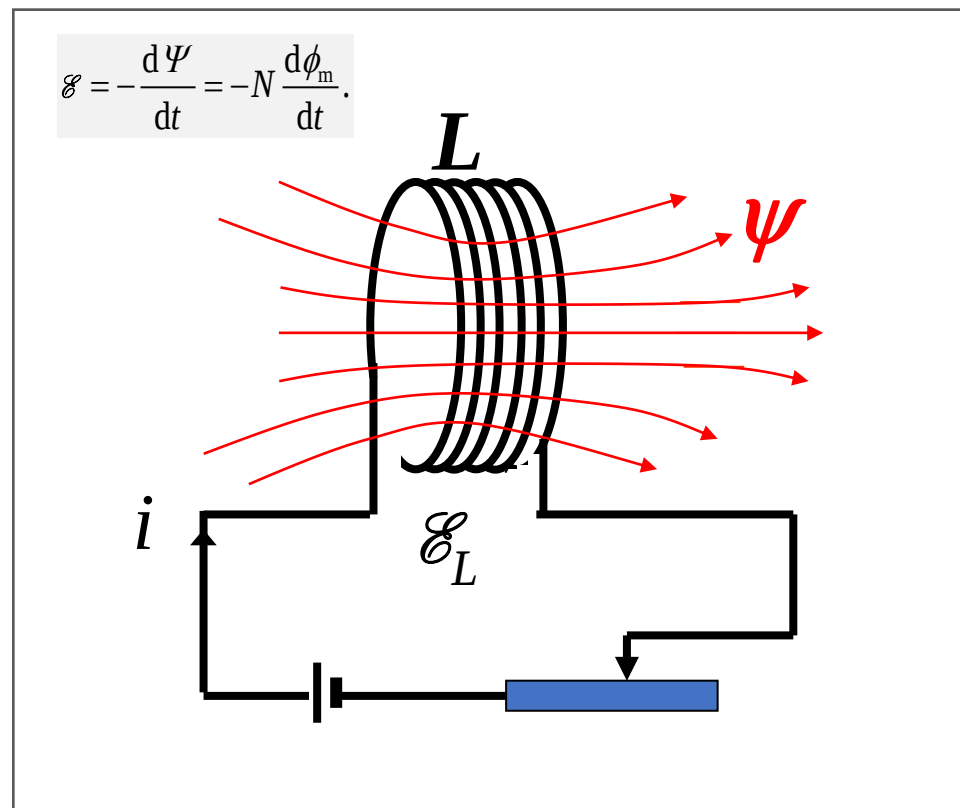
$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

与线圈的匝数、大小、周围的磁介质有关；与线圈是否通电无关。

自感的单位：亨利（H）

$$1 \text{ H} = \frac{1 \text{ Wb}}{1 \text{ A}}, \quad 1 \text{ H} = 10^3 \text{ mH} = 10^6 \mu\text{H}.$$

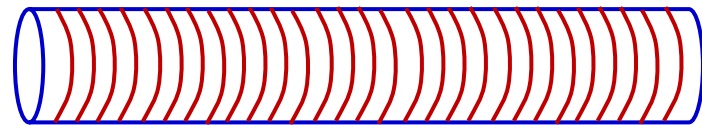
一个具有自感的线圈，在电路中以符号 $\overline{\text{m m m}}$ 表示。





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例76. 一单层密绕螺线管 $l = 50\text{cm}$ 、 $S = 10\text{cm}^2$ 、 $N = 3000$ ，求自感 $L = ?$



解： $B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{NI}{l}$. —— 假想导线中通过的电流强度。

$\psi = NBS = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} S = LI$. —— 单位长度的匝数

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V.$$

代入数值，有 $L = 23 \times 10^{-3} \text{H} = 23 \text{mH}$. —— 螺线管的体积



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例77. 互感电动势的物理图像

- 线圈 L_1 在线圈 L_2 引起的磁通链

$$\psi_{21} \propto B_1 \propto I_1 \quad \psi_{21} = M_{21} I_1$$

- 线圈 L_2 在线圈 L_1 引起的磁通链

$$\psi_{12} \propto B_2 \propto I_2 \quad \psi_{12} = M_{12} I_2$$

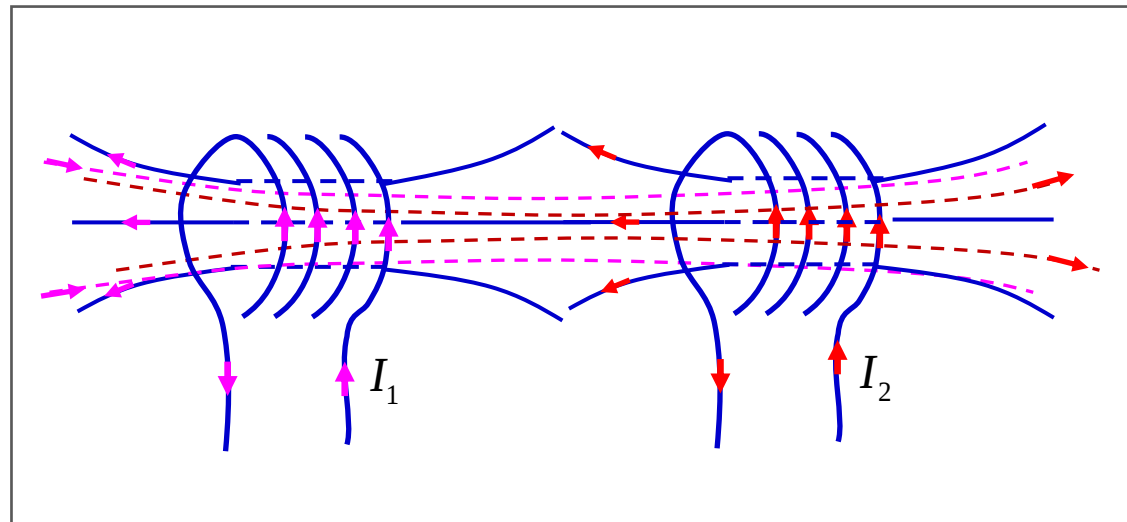
M_{12} 、 M_{21} 为比例系数，称为互感系数，简称为互感。

M_{12} 、 M_{21} 由两个线圈的形状、大小、匝数、内部介质及相对位置决定。

通常由实验测定。

可以证明： $M_{12} = M_{21} = M$ 。

互感单位：亨利（H）



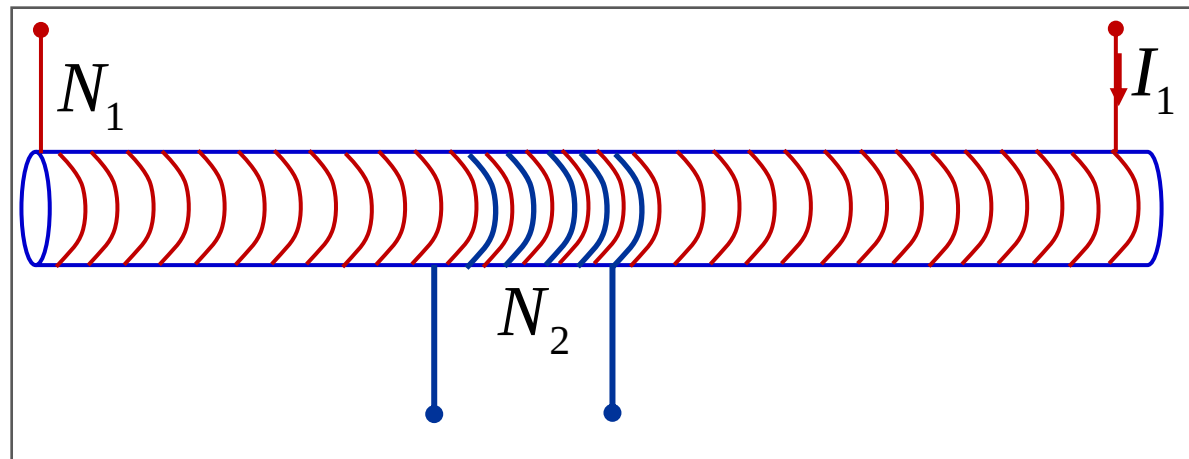


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例78. 长直密绕螺线管，长 $l=1\text{m}$ ，横截面积 $S = 10\text{ cm}^2$ ，匝数 $N_1 = 1000$ 。在其中段密绕另外一个线圈， $N_2 = 20$ 。求：

(1) 互感系数 $M = ?$

(2) 若 $dI_1/dt = 10\text{ A/s}$ ，感生电动势 $\mathcal{E} = ?$



解： $B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$

$$\psi_{21} = N_2 B_1 S = N_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} S$$

$$\rightarrow M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l^2} V = 25 \times 10^{-6} \text{ H} = 25 \mu\text{H}.$$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} = -25 \times 10^{-5} \text{ V} = -250 \mu\text{V}.$$



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例79. 电场能量和磁场能量

• 电场能量的物理图像

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2.$$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} (Ed)^2$$

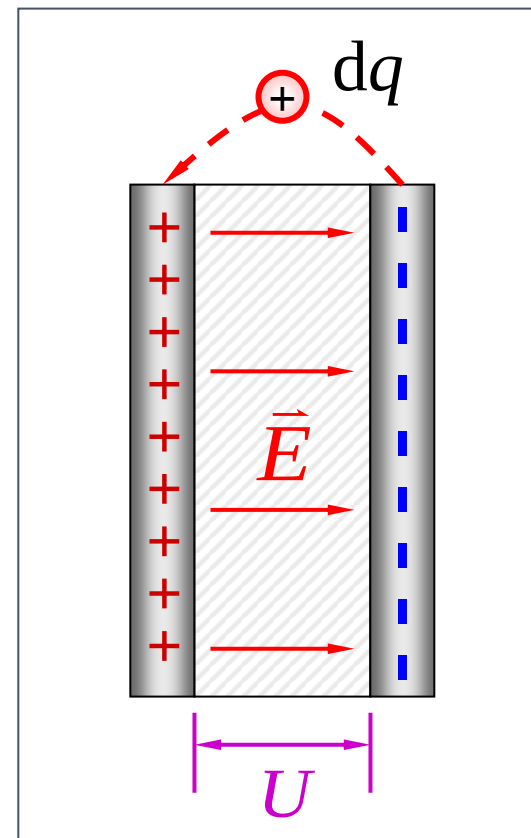
静电场的能量密度

$$= \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd$$

静电场中单位体
积内存储的能量。

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

(单位: $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$)





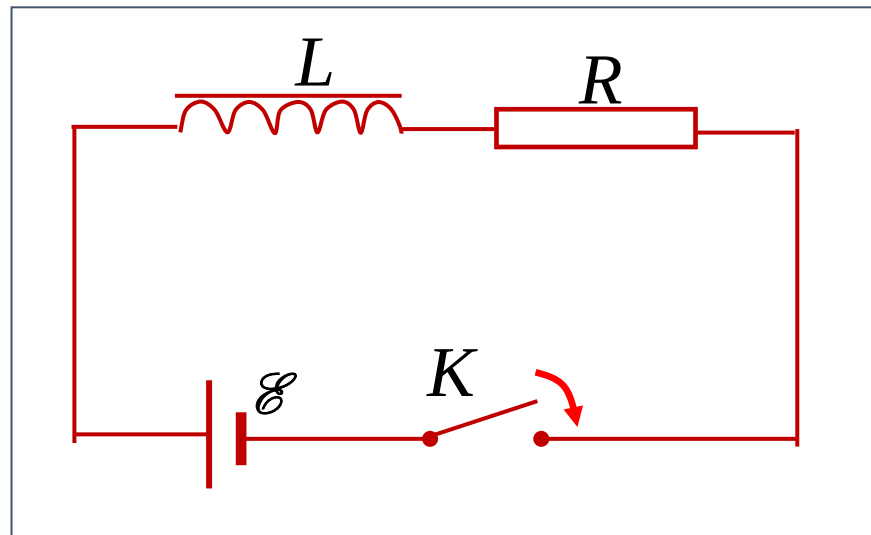
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例79. 电场能量和磁场能量

• 暂态电路的分析

定态： $i = 0, i = I$ 的状态。

暂态： $i : 0 \rightarrow I$ 的过程。



分析：

$$\mathcal{E} - |\mathcal{E}_L| = Ri \xrightarrow{|\mathcal{E}_L| = L \frac{di}{dt}} \mathcal{E} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

在 dt 时间在自感线圈中
建立磁场储能（电源反
抗自感电动势做功）

$$\rightarrow \mathcal{E} i dt = Ri^2 dt + L i di$$

在 dt 时间内电
源输出的能量

在 dt 时间内电
阻消耗的能量



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例79. 电场能量和磁场能量

- 自感磁能

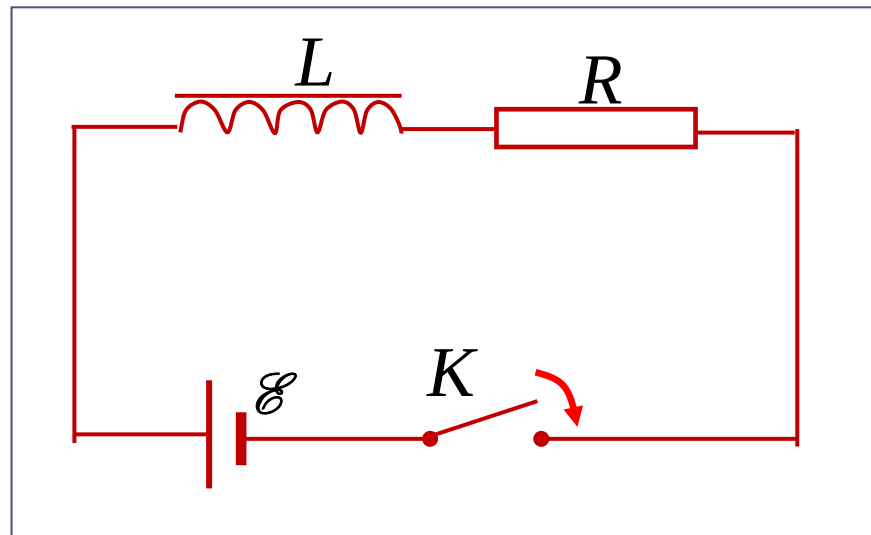
$$dA = Lidi$$

$$\rightarrow A = \int dA = L \int_0^I idi = \frac{1}{2} LI^2.$$

——“电源反抗自感电动势做功”转换为“在自感线圈中建立磁场储能”。

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2.$$

——当线圈中通有电流 I 时，在自感线圈储存的磁场能，称为自感磁能。



请思考：互感现象发生的时候也会有类似的能量转化吗？

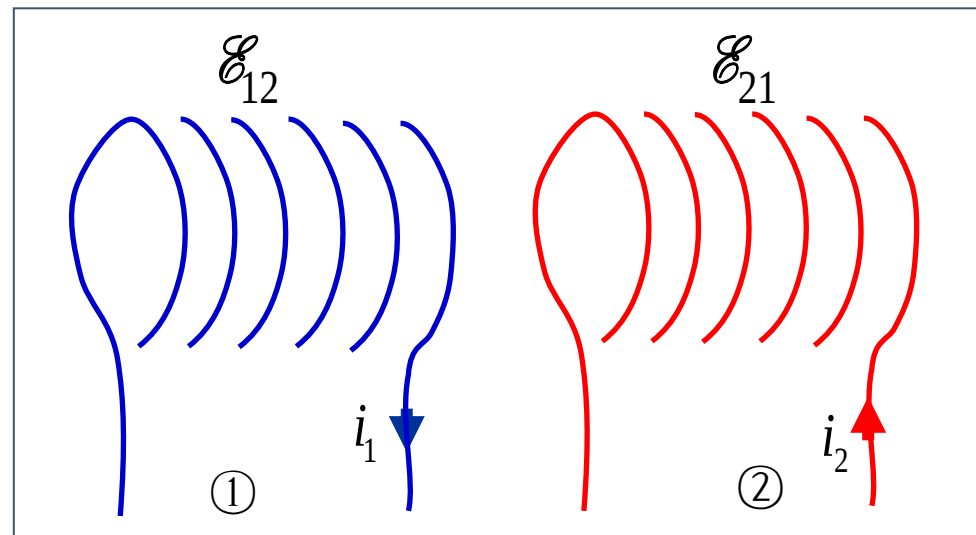


2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例79. 电场能量和磁场能量

• 互感磁能

对于两个相对放置的通电线圈，
电源电动势除了提供产生焦耳热及建立
磁场自感磁能的能量外，还提供在
相邻线圈中建立互感磁能（即：**克服
互感电动势而做功**）。



$$A = A_1 + A_2 = -\int_0^\infty \mathcal{E}_{12} i_1 dt - \int_0^\infty \mathcal{E}_{21} i_2 dt$$

$$= \int_0^\infty M \frac{di_2}{dt} i_1 dt + \int_0^\infty M \frac{di_1}{dt} i_2 dt = M \int_0^{I_1 I_2} d(i_1 i_2) = M I_1 I_2$$

存储在2个线圈中的磁能



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例79. 电场能量和磁场能量

• 总的磁场能

当两个线圈相对放置，均有电流通过时，两个线圈内既有自感磁能，也有互感磁能。总的磁场能量为：

$$W_m = W_{L_1} + W_{L_2} + W_{M_{12}}$$

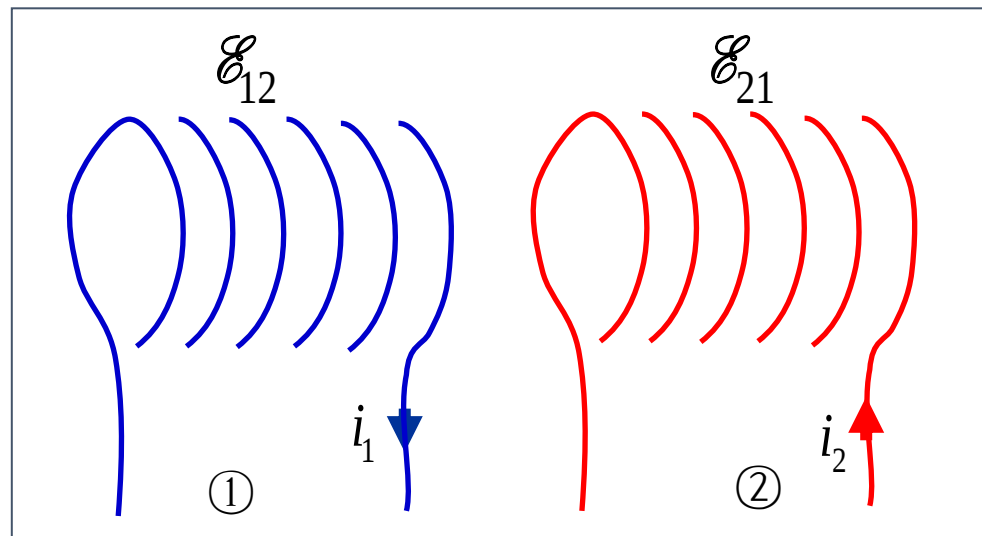
$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

存储在线圈1
内的磁能

$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_2 I_1$$

存储在线圈2
内的磁能

互感磁能



延申与思考：两个线圈中电流的传导方向是否会影响互感磁能表达式？

(线圈的顺接与反接问题)



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例79. 电场能量和磁场能量

• 磁场的能量密度

$$H = nI. \quad B = \mu_0 \mu_r nI.$$

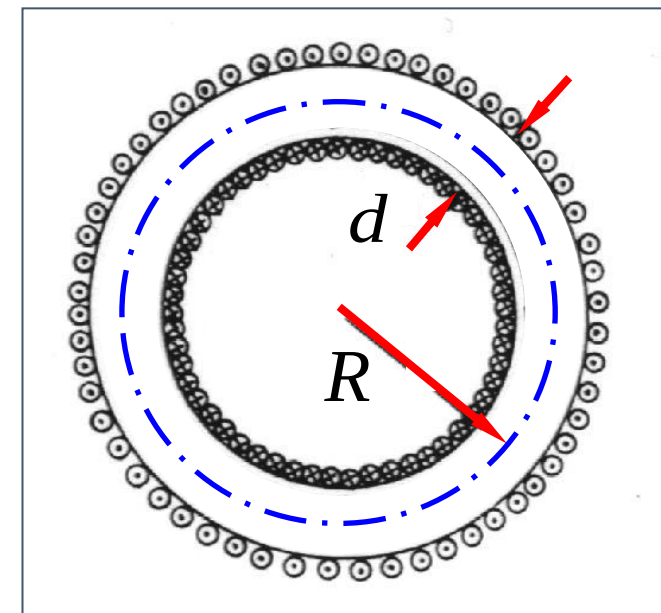
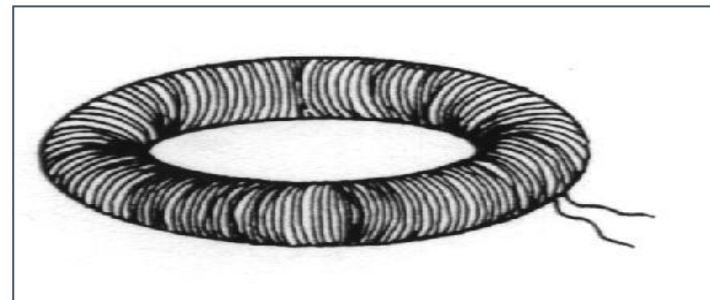
$$\Psi = NBS \approx \mu_0 \mu_r NnIS \approx \mu_0 \mu_r n^2 S (2\pi R) I.$$

$$\rightarrow L = \mu_0 \mu_r n^2 S (2\pi R) = \mu_0 \mu_r n^2 V.$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} (\mu_r \mu_0 n^2 V) \frac{H^2}{n^2} = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2 V.$$

$$\text{磁场能能量密度: } w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}.$$

$$\text{电场能能量密度: } w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}.$$



磁场能量与静电场能量在形式上具有对称性



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例80. 如图所示同轴电缆，中间充以磁介质，芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反。已知 R_1, R_2, I, μ 。求单位长度同轴电缆的磁能和自感。设金属芯线内的磁场可略。

解：

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

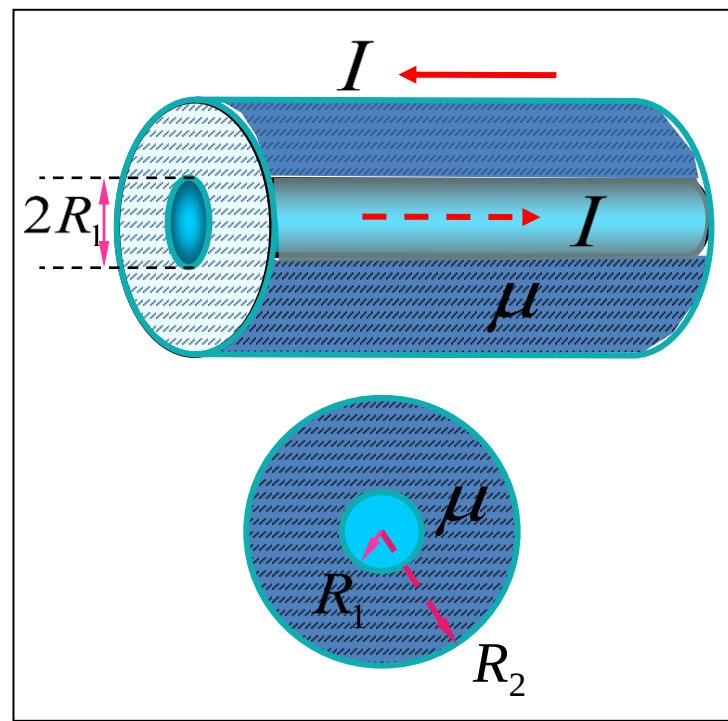
$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} dV = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

单位长度同轴电缆
中壳层的体积元

$$dV = 2\pi r dr \cdot 1$$





2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例81. 麦克斯韦方程组

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S_{\text{内}}} q_{0i} \quad \boxed{\iiint_V \rho_e dV}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \boxed{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{L_{\text{包围}}} I_{0i} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Gauss公式

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

Stokes公式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

线性、各向同性的
电介质

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

线性、各向同性的
磁介质

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

导体内部欧姆定
律的微分形式



2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例81. 麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho_e \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

真空中

$$\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1$$

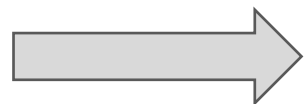
$$\rho_e = 0, \vec{j} = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$



$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

变化电场和变化的磁场相互激发，向空间辐射形成衍生到空间的电磁场，即电磁波。



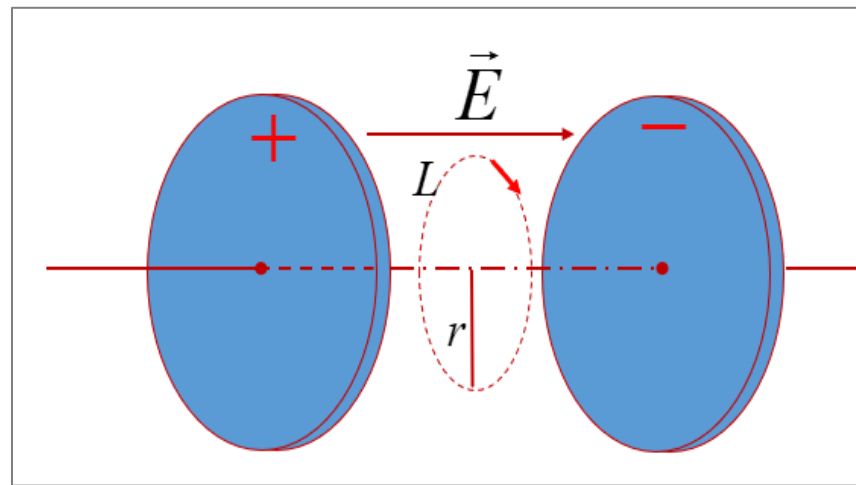
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例82. 半径为 R 的两块圆形金属导体板构成平行板电容器，由圆板的中心处引出二根长直导线给电容器匀速充电，使电容器两板电场的变化率为 $\frac{dE}{dt} = 10^{13} \text{ V/m} \cdot \text{s}$. (1) 求两极板间的位移电流；(2) 计算电容器内离两板中心连线处 r ($r < R$) 的磁感应强度。

解： (1)
$$I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \iint_S \frac{dE}{dt} dS$$
$$= \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi R^2 \approx 2.8 \text{ A}.$$

(2)
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad H 2\pi r = \frac{\partial D}{\partial t} \pi r^2$$

$$\rightarrow H(r) = \frac{r}{2} \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{r}{2} \frac{dE}{dt} \quad \rightarrow \quad B(r) = \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{r}{2} \frac{dE}{dt}.$$





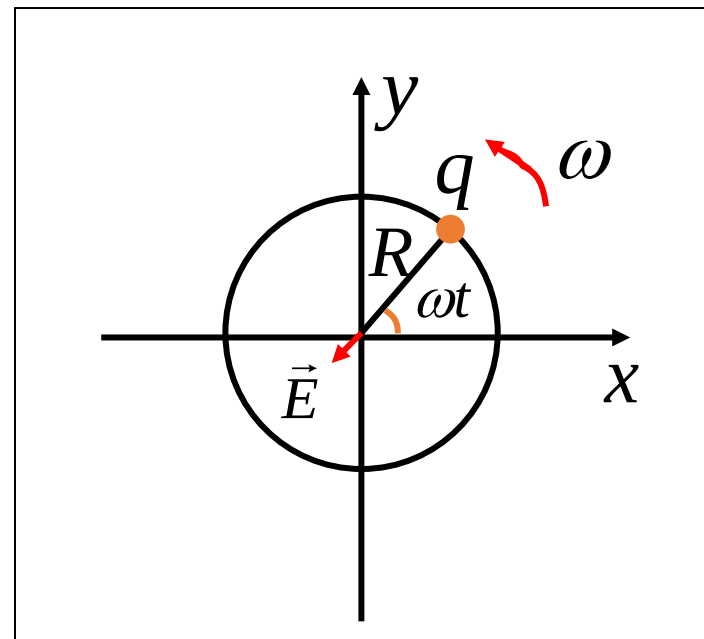
2. 典型例题 —— ② 电磁部分

例83. 点电荷 q ，以匀角速度 ω 作半径为 R 的圆周运动， $t=0$ 时， q 在 $x_0=R, y_0=0$ 。则圆心处 O 点的位移电流密度矢量为：_____。

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r = \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{j}_d &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \frac{q\omega}{4\pi R^2} (\sin \omega t \vec{i} - \cos \omega t \vec{j}). \end{aligned}$$



请思考：做圆周运动的电荷究竟是产生了电场？还是磁场？还是电流呢？它会向外辐射电磁波吗？



谢 谢